

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ

# ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД

Науково-технічний збірник

---

Випуск 99

Заснований у 1965 р.

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61

Головний редактор *В.А. Баженов*, д-р техн. наук  
Заступник головного редактора *С.О. Пискунов*, д-р техн. наук  
Відповідальний секретар *О.В. Геращенко*, канд. техн. наук

Редакційна колегія:

*П.В. Алявдін*, д-р техн. наук (Польща)  
*Ю. Аткичюнас*, д-р техн. наук (Литва)  
*О.М. Белостоцький*, д-р техн. наук (Росія)  
*І. Елішаков*, д-р техн. наук (США)  
*С.Н. Кривошапко*, д-р техн. наук (Росія)  
*С.Ю. Фіалко*, д-р техн. наук (Польща)  
*Чан Дик Тінг*, д-р техн. наук (В'єтнам)  
*Л.М. Лобанов*, д-р техн. наук, академік  
НАН України

*А.В. Перельмутер*, д-р техн. наук  
*О.Ф. Дащенко*, д-р техн. наук  
*П.В. Ясній*, д-р техн. наук  
*В.В. Гайдайчук*, д-р техн. наук  
*Г.М. Іванченко*, д-р техн. наук  
*П.П. Лізунов*, д-р техн. наук  
*І.І. Солодей*, д-р техн. наук

Рекомендовано до випуску Вченою радою Київського національного університету будівництва і архітектури 27 жовтня 2017 р. (протокол №7).

**Опір матеріалів і теорія споруд:** Науково-технічний збірник. – Вип. 99 /  
Голов. ред. В.А. Баженов. –К.: КНУБА, 2017. – 206 с. – Укр. та англ. мовами.

У збірнику наведено статті з результатами досліджень у галузі опору матеріалів, будівельної механіки, теорії пружності і пластичності. Особливу увагу приділено розробці й розвитку методів розрахунку міцності, стійкості, динаміки просторових конструкцій з урахуванням геометричної нелінійності, пластичних властивостей руйнування матеріалів; питанням чисельної реалізації рішень на ЕОМ; дослідженню напружено-деформованого стану тіл складної структури при сталях і змінних у часі навантажень, включаючи випадкові впливи.

Призначений для наукових працівників, викладачів, виробничників, докторантів, аспірантів та студентів.

Індексація і партнери



<http://opir.knuba.edu.ua/>  
Адреса редакційної колегії:  
КНУБА, Повітрофлотський пр., 31.  
м. Київ, 03037  
Тел.: (044) 248-3040  
E-mail: [omtc@knuba.edu.ua](mailto:omtc@knuba.edu.ua)

УДК 539.3/6  
ББК 30.121+38.112  
О-61  
© КНУБА, 2017

УДК 539.3

**НАУКОВА ШКОЛА БУДІВЕЛЬНОЇ МЕХАНІКИ  
КИЇВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
БУДІВНИЦТВА І АРХІТЕКТУРИ**

**В.А. Баженов,**  
д-р техн. наук,

**Ю.В. Ворона,**  
канд. техн. наук,

**П.П. Лізунов,**  
д-р техн. наук,

**С.О. Пискунов,**  
д-р техн. наук,

**О.В. Шишов,**  
канд. техн. наук

*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

Висвітлюється історія заснування і розвитку наукової школи будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури, зародження якої пов'язується із створенням у 1961 р. науково-дослідної лабораторії тонкостінних просторових конструкцій. Прослідковано основні етапи шляху, пройденого науковим колективом лабораторії, на базі якої згодом був створений НДІ будівельної механіки. Зазначається, що основними задачами наукової школи були і є розробка орієнтованих на використання комп'ютерної техніки методів та алгоритмів чисельного аналізу для розв'язання задач механіки деформівних тіл, а також розробка автоматизованих систем розрахунку конструкцій у різних галузях техніки. Підкреслено тісний зв'язок науково-дослідних робіт з навчальним процесом кафедри будівельної механіки.

**Ключові слова:** будівельна механіка, чисельні методи, універсальні автоматизовані системи, розрахунок на міцність, стійкість та коливання, наукові публікації, впровадження результатів у навчальний процес.

**Заснування наукової школи і підготовка наукових кадрів.** У 1961 р. в Київському національному університеті будівництва і архітектури (тоді Київському інженерно-будівельному інституті, КІБІ) за ініціативою завідувача кафедри будівельної механіки, доктора технічних наук, професора Д.В. Вайнберга (1905-1973) була створена Науково-дослідна лабораторія тонкостінних просторових конструкцій (НДЛ ТПК). Згідно з наказом Міністра вищої і середньої освіти Української РСР Ю.М. Даденкова № 601 від 19 грудня 1960 р. та наказом директора Київського інженерно-будівельного інституту доцента О.Л. Каліщука від 17 січня 1961 р. виконання обов'язків наукового керівника Науково-

дослідної лабораторії тонкостінних просторових конструкцій було покладено на професора Д.В. Вайнберга [1].

Організація лабораторії - це власна ідея проф. Д.В. Вайнберга, а основні наукові напрямки діяльності НДЛ ТПК були сформульовані ним особисто. Під його керівництвом Науково-дослідна лабораторія тонкостінних просторових конструкцій за короткий час увійшла до числа найбільш відомих наукових колективів у галузі будівельної механіки і механіки деформівного твердого тіла. З ініціативи Д.В. Вайнберга Академія наук УРСР в особі Президента АН УРСР академіка Б.Є. Патона та Головного вченого секретаря Президії АН УРСР академіка АН УРСР Г.С. Писаренка підтримала клопотання щодо перетворення НДЛ ТПК в Проблемну науково-дослідну лабораторію тонкостінних просторових конструкцій при Київському інженерно-будівельному інституті з



Д.В. Вайнберг

віднесенням її до першої категорії наукових установ. У 1966 році за рішенням колегії Державного Комітету Ради Міністрів СРСР із науки і техніки від 29 жовтня 1966 року Науково-дослідна лабораторія тонкостінних просторових конструкцій Київського інженерно-будівельного інституту, очолювана Д.В. Вайнбергом, була перетворена в Проблемну науково-дослідну лабораторію тонкостінних просторових конструкцій.

Перед Проблемною лабораторією були визначені такі наукові напрямки діяльності і задачі:

- розвиток теорії і методів статичного та динамічного розрахунку просторових систем;
- розробка методів та алгоритмів чисельного аналізу для розв'язання задач механіки деформівних тіл;
- розробка автоматизованої системи розрахунку із застосуванням обчислювальної техніки щодо досліджень ефективних форм конструкцій у різних галузях техніки.

Уже з перших кроків діяльності Проблемної лабораторії було прийнято рішення, яке згодом повністю себе виправдало, що найбільш доцільно створювати універсальні системи, які дозволяли б розв'язувати широке коло задач. Тому виключною особливістю теоретичних і прикладних досліджень, що проводились, був їх універсальний та всеохоплюючий характер. Виходячи з цього завдання, у Проблемній

науково-дослідній лабораторії тонкостінних просторових конструкцій у цей період широкого розмаху набули дослідження з розробки і застосування чисельних методів розрахунку конструкцій.

Основні напрямки та найважливіші результати роботи Проблемної лабораторії в цей період:

1961-1964 рр.: теоретичні розробки - метод скінчених різниць вирішення плоскої задачі теорії пружності згинання пластин; розрахунок висячих вантових систем; вирішення задач будівельної механіки на ЕОМ на основі імпульсивних функцій; експериментальні методи - метод муарів в задачах згину пластин; поляризаційно-оптичний метод в задачах теорії пружності; тензометричні методи статички і динаміки великогабаритних просторових конструкцій.

1965-1970 рр.: створення варіаційно-різницевого методу вирішення задач будівельної механіки: розрахунок пластинчатих систем складної форми, гнучких ребрастих пластин та оболонок; динаміка тонкостінних конструкцій; розвиток методу скінчених різниць для розрахунку ребрастих оболонок і пластин із застосуванням конформних відображень; розробка чисельного варіанту методу потенціалу для вирішення задач згину пластин; розробка пакетів програм для ЕОМ першого та другого покоління.

1971-1975 рр.: узагальнення варіаційно-різницевого методу для вирішення нелінійних задач будівельної механіки; статика та стійкість непологих оболонок при термосилових впливах; розробка методів статистичних випробувань для вирішення задач теорії пружності; чисельно-аналітичний метод потенціалу вирішення задач будівельної механіки та теорії пружності; розробка великої автоматизованої системи розрахунків на міцність на ЕОМ третього покоління "Прочность-75"; розробка автоматизованих систем статистичної обробки результатів натурних випробувань.

Зростання Лабораторії, ускладнення та поглиблення проблем, що вивчаються, призвели 1975 р. до розподілення роботи по відділах і секторах.

В цей період були закладені основи Наукової школи із створення теорії та методів розв'язання складних нелінійних задач будівельної механіки та механіки деформівного твердого тіла, результатом діяльності якої стала підготовка значної кількості висококваліфікованих фахівців в галузі будівельної механіки і механіки деформівного твердого тіла. Зокрема, впродовж існування Наукової школи були захищені докторські дисертації:

1975 рік: О.Л. Синявський

1978 рік: О.С. Сахаров

1979 рік: В.І. Гуляєв  
1981 рік: Ю.В. Верюжський  
1984 рік: В.А. Баженов  
1987 рік: В.Є. Вериженко  
1989 рік: В.К. Чибіряков, П.П. Лізунов, О.І. Гуляр, В.В. Киричевський  
1990 рік: Є.О. Гоцуляк, Є.С. Дехтярюк  
1992 рік: В.В. Гайдайчук, Г.Б. Ковнеристов  
1993 рік: О.А. Киричук  
1994 рік: О.В. Гондлях  
1995 рік: О.Л. Козак, О.І. Оглобля  
1999 рік: В.К. Цихановський  
2004 рік: С.Ю. Фіалко, Чан Дик Тінь  
2006 рік: Я.О. Слободян  
2008 рік: М.О. Соловей  
2009 рік: В.М. Трач  
2011 рік: С.О. Пискунов  
2012 рік: Г.М. Іванченко  
2013 рік: І.І. Солодей

Загалом за час існування Наукової школи захищені 27 докторських і 171 кандидатська дисертації, а впродовж останніх 25 років за спеціальністю «Будівельна механіка» захищено 16 докторських дисертацій. Це дуже високий показник для технічних наук.

З 1988 року в КНУБА працює спеціалізована вчена рада з захисту докторських дисертацій (Д.26.056.04) із спеціальностей «Будівельна механіка», «Механіка деформівного твердого тіла», «Будівельні конструкції, будівлі та споруди».

На базі Проблемної науково-дослідної лабораторії тонкостінних просторових конструкцій в 1991 р. було створено Науково-дослідний інститут будівельної механіки (НДІБМ).

Фахівці, підготовлені науковою школою очолюють ряд кафедр Київського національного університету будівництва і архітектури: будівельної механіки (д.т.н., проф. Баженов В.А.), теоретичної механіки (д.т.н., проф. Гайдайчук В.В.), опору матеріалів (к.т.н., доцент Кошевий О.П.), вищої математики (д.т.н., проф. Чибіряков В.К.), основ інформатики (д.т.н., проф. Лізунов П.П.); працюють на кафедрах: основ і фундаментів (д.т.н., проф. Сахаров В.О.), теоретичної механіки (к.т.н., доцент Любченко С.М.). Академік НАН України Л.М.Лобанов багато років є заступником директора Інституту електрозварювання ім. Є.О.Патона НАН України. Крім того, наши випускники працюють в низці галузевих Науково-дослідних інститутів і Науково-виробничих підприємств, в інших навчальних закладах України, а також в Австралії,

Канаді, Німеччині, Новій Зеландії, Польщі, Росії, США, Франції і багатьох інших країнах світу.

На жаль ряд провідних учених із світовими ім'ями пішли з життя (професори Верюжський Ю.В., Гоцуляк Є.О., Дехтярюк Є.С., Ковнеристов Г.Б., Соловей М.О., Цихановський В.К.).

Підготовка фахівців вищої кваліфікації і зараз залишається одним із головних напрямів діяльності Наукової школи. Зважаючи на це в теперішній час 4 співробітники кафедри будівельної механіки і НДІБМ КНУБА працюють над підготовкою докторських дисертацій, захист яких запланований в найближчі роки. Це к.т.н, доцент кафедри будівельної механіки Шкриль О.О. (захист запланований на 2018 р.), к.т.н., докторант КНУБА Вабішевич М.О. і к.т.н., доцент Максимюк Ю.В. (2020 р.), к.т.н., професор кафедри будівельної механіки Ворона Ю.В. (2021 р.). Також в період до 2020 р. запланований захист 5 кандидатських дисертацій (Валер В.А., Затилук Г.А., Кара І.Д., Козак А.А., Чепурна О.О.).

**Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд».** Досягненню такого рівня підготовки науково-технічних кадрів в значній мірі сприяли відповідні публікації здобувачів у збірнику «Опір матеріалів і теорія споруд».

Міжвідомчий збірник наукових праць «Опір матеріалів і теорія споруд» був створений у 1965 році (нещодавно відзначено 50-річчя). За період 1965-2017 рр. видано 99 випусків. У 1965-1998 роки збірник видавався російською мовою і мав назву «Сопротивление материалов и теория сооружений», з 1998 р. збірник видається під назвою «Опір матеріалів і теорія споруд».

Збірник надходить до провідних бібліотек України, зокрема надсилається до Національної бібліотеки України ім. В.І. Вернадського (повний текст випусків збірника представлений також і на сайті цієї бібліотеки), Національної парламентської бібліотеки України, Львівської Національної бібліотеки України ім. Стефаника та інших.



В збірнику публікуються наукові статті, які підготовлені українською, англійською та іншими мовами і містять результати фундаментальних досліджень з актуальних проблем опору матеріалів, будівельної механіки, механіки деформівного твердого тіла, теорії споруд, суміжних прикладних проблем міцності і надійності в машинобудуванні, будівництві та інших галузях сучасної техніки. Також висвітлюються питання викладання будівельної механіки та подається інформація про нові навчальні і наукові видання за тематикою збірника.

Електронні версії статей, опублікованих в збірнику з 2009 р., доступні на сайті збірника [orig.knuba.edu.ua](http://orig.knuba.edu.ua), де також представлена інформація про умови публікації статей та інші матеріали, що регламентують діяльність редколегії та поширення матеріалів збірника.

Збірник індексується в науково-метричних базах даних Web of Science (<https://opencscience.in.ua/ua-journals>), Index Copernicus (<https://journals.indexcopernicus.com/search/details?id=32331>), DOAJ (<https://doaj.org/toc/2410-2547>), має оцінку із використанням критерію Journal International Compliance Index JIC index = 0.173 (<https://jicindex.com/journals/42-64>). Також збірник представлений в українському реферативному журналі «Джерело» і в реферативній базі даних «Україніка наукова».

З 2017 р. за рішенням Наукової ради Міністерства освіти і науки України збірник «Опір матеріалів і теорія споруд» має особливий статус фахового видання для публікації результатів НДР, які виконуються в наукових установах України за рахунок держбюджетного фінансування за напрямом «Механіка» за результатами конкурсу МОН.

Широта проблематики статей та сучасні засоби електронного розповсюдження матеріалів збірника «Опір матеріалів і теорія споруд» роблять його корисним для дослідників, викладачів, аспірантів і студентів, інженерів-будівельників, інших фахівців в галузі механіки, а також для всіх, хто цікавиться сучасними проблемами механіки.

**Науково-дослідний інститут будівельної механіки (НДІБМ КНУБА)** [2,3]. Створений у 1991 р. на базі Проблемної науково-дослідної лабораторії тонкостінних просторових конструкцій НДІБМ КНУБА проводить фундаментальні та прикладні дослідження із теорії і методів розрахунків на міцність, стійкість та коливання складних просторових конструкцій під дією зовнішніх впливів різної фізичної природи і створення на цій основі проблемно- та об'єктно орієнтованого програмного забезпечення. Результати робіт мають практичне застосування для розв'язання задач міцності, жорсткості, стійкості, моделювання коливальних процесів та визначення несучої здатності будівельних конструкцій та споруд, їх окремих частин, а також



відповідальних елементів конструкцій машин, що працюють в різних галузях техніки, зокрема лопатки газових і парових турбін (в складі пера і хвостовика лопатки як окремих об'єктів дослідження, рис. 1,2), ротори турбін, корпус ядерного реактора, пологі оболонки перекриттів підземних і наземних споруд, несучі елементи веж і мачт, стержневі системи, ємності високого тиску, елементи запорної арматури, демпферні пристрої та низка інших відповідальних об'єктів (рис. 3-6).



Рис. 1

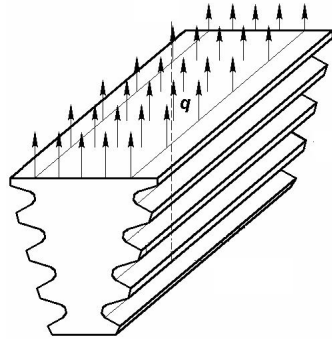


Рис. 2



Рис. 3

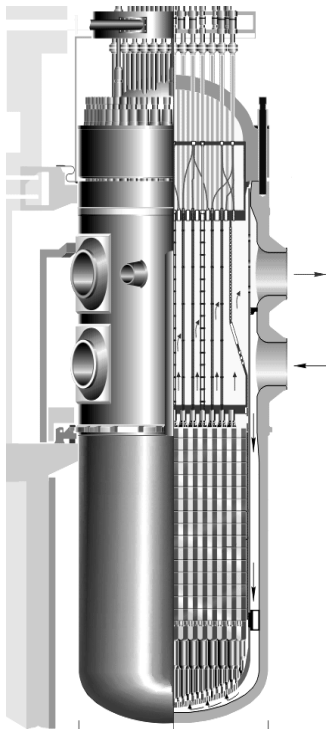


Рис. 4



Рис. 5



Рис. 6

НДІБМ співпрацює з науковими установами Національної академії наук України - Інститутом механіки ім. С.П. Тимошенка, Інститутом проблем міцності ім. Г.С. Писаренка, Інститутом електрозварювання ім. Є.О. Патона та з науково-дослідними установами в галузі будівництва - Державним Науково-дослідним інститутом будівельних конструкцій (НДІБК), Науково-дослідним інститутом будівельного виробництва (НДІБВ), ВАТ «Український науково-дослідний і проектний інститут сталевих конструкцій ім. В.М. Шимановського», з промисловими підприємствами в галузі машинобудування - Державне підприємство "Науково-виробничий комплекс газотурбобудування "Зоря-Машпроект", ЗМКБ Прогрес", АТ "Мотор-Січ". Співпраця здійснюється в напрямку проведення спільних наукових досліджень та впровадження і апробації фундаментальних і прикладних результатів.

Результати досліджень, виконаних в НДІБМ, були відзначені Державними преміями України в галузі науки і техніки:

1991 р. - «Теорія, методи математичного моделювання та чисельний аналіз процесів деформування складних просторових конструкцій» (автори Баженов В.А., Гоцуляк Є.О., Гуляев В.І., Гуляр О.І., Дехтярюк Є.С., Ісаханов Г.В., Кислокий В.М., Сахаров О.С.);

2003 р. - «Наукові дослідження, розробка та впровадження низькоенергоємних технологій і техніки у будівництві» (Турай А.М., Мхітарян Н.М., Бадеян Г.В., Баженов В.А., Смірнов В.М., Пелевін Л.С., Пристайло Ю.П., Баладінський В.Л., Фомін А.В., Костенюк О.О.).

В теперішній час в НДІБМ працюють 5 докторів технічних наук і 13 кандидатів технічних наук.

В НДІБМ щорічно виконується 5 фундаментальних науково-дослідних робіт, тематика яких визначається актуальними потребами сучасної техніки, які потребують вирішення із використанням методів і засобів комп'ютерної механіки. Зазначені фундаментальні НДР фінансуються Міністерством освіти і науки України (МОНУ) за рахунок видатків державного бюджету на підставі результатів відкритого конкурсу проектів НДР, який щорічно проводиться МОНУ. Тривалість виконання фундаментальної НДР – 3 роки.

Зважаючи на це, в 2017 р. в НДІБМ завершено виконання двох науково-дослідних робіт, розпочатих в 2015 р. В ході виконання НДР «Теорія і методи оцінки несучої здатності конструкцій сучасної техніки при статичному і циклічному навантаженні з урахуванням недосконалостей і пошкоджень» (науковий керівник – д.т.н., проф. Баженов В.А., а з 2017 р. – докторант кафедри будівельної механіки, к.т.н. Вабішевич М.О.) розроблені теорія і методи визначення напружено-деформованого стану просторових тіл під впливом експлуатаційних

навантажень, в тому числі з урахуванням пошкоджень і недосконалостей, розроблено засоби скінченноелементної дискретизації тіл з тріщинами, методика визначення параметрів напружено-деформованого стану і обчислення параметрів механіки руйнування тіл обертання з тріщинами і деталізація її застосування при реалізації напіваналітичним методом скінчених елементів. Проведена апробація розроблених засобів і розв'язано практичні задачі про несучу здатність елементів технологічного обладнання – моделювання зростання початкової тріщини в ємності високого тиску (рис. 7) і визначення ресурсу приєднувального штуцера з вихідними дефектами під впливом тривалого багаточиклового навантаження (рис. 8).

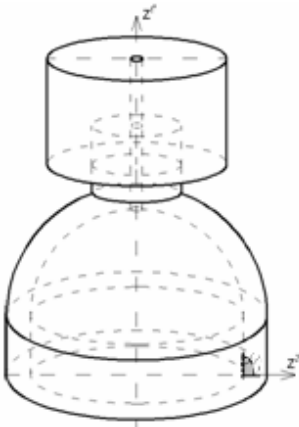


Рис. 7

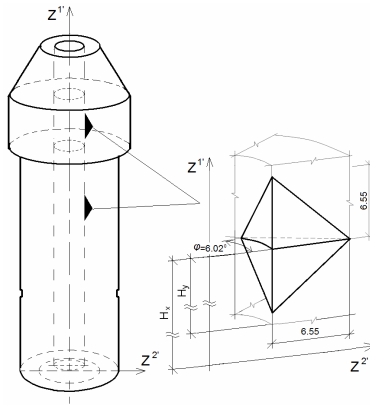


Рис. 8

В ході виконання НДР «Створення теорії і методів дослідження невстановлених температурних полів та пружнопластичного деформування просторових тіл» (науковий керівник д.т.н. Солодей І.І.) розроблено теоретичні основи нової методики чисельного розв'язання задач нестационарної теплопровідності і термopужнопластичного деформування методом скінчених елементів; отримано розв'язувальні співвідношення універсального скінченого елемента на основі моментної схеми скінчених елементів для розв'язання задач нестационарної теплопровідності і термopужнопластичного деформування, розроблено і реалізовано алгоритм розв'язання задачі нестационарної теплопровідності та досліджено його достовірність. Розв'язано практичні задачі про деформування відповідальних елементів конструкцій в неоднорідному температурному полі: визначення напружено-деформованого стану

запорного клапана (рис. 9) та розподілення напружень і визначення зон пластичності ротора парової турбіни (рис. 10).

НДР «Дослідження формозмінення і стійкості масивних, тонкостінних та комбінованих вісесиметричних конструкцій при термосиловому навантаженні» (науковий керівник д.т.н., проф. Пискунов С.О.) виконується з 2016 р. В ході виконання двох етапів НДР отримані вихідні і розрахункові співвідношення пружнопластичності, термов'язкопружності та нестационарної теплопровідності, доведена індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості, створена бібліотека скінчених елементів для дискретизації досліджуваних об'єктів і проведено розв'язання тестових задач для доведення достовірності розроблених алгоритмів моделювання фізично і геометрично нелінійного деформування тонкостінних об'єктів та процесів формозмінення (обробки металів тиском в процесах штампування і кування, рис. 11, 12).

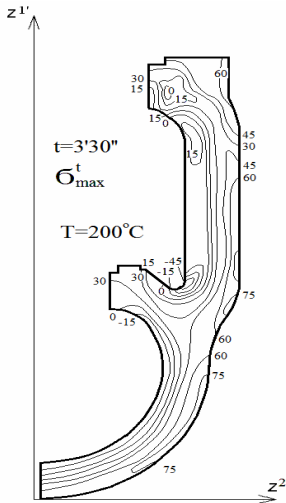


Рис. 9

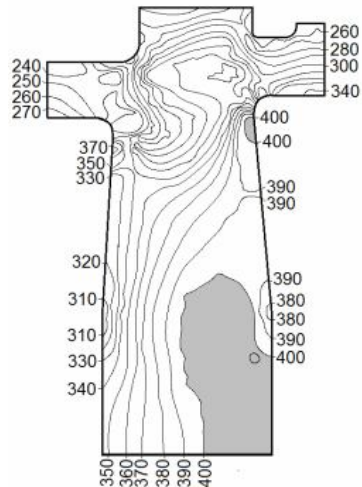


Рис. 10

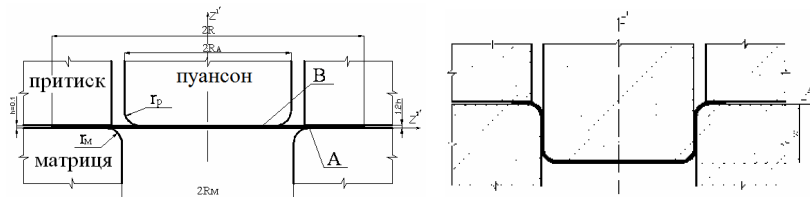


Рис. 11

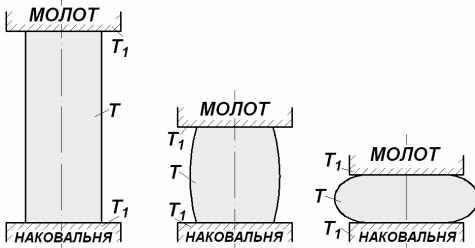


Рис. 12

виконання НДР розроблена методика, яка дозволяє аналізувати динамічний стан та динамічну поведінку сильно нелінійної розривної віброударної системи, схематично зображеної на рис. 13,а, при зміні параметрів як самої системи, так і параметрів зовнішнього навантаження. Для моделювання використані двомасові схеми (рис. 13,б,в).

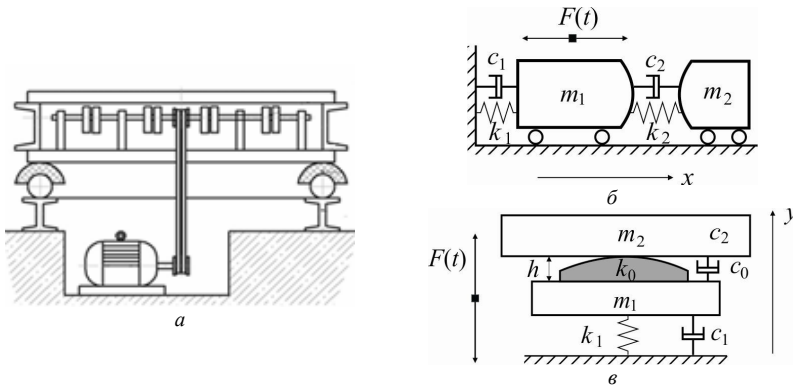


Рис. 13

Створена методика використовує довжину дуги кривої розв'язків як параметра продовження, що дає можливість легко проходити точки повороту при дослідженні періодичних регулярних рухів, характеристики одного з яких показані на рис. 14. Методика продовження дозволяє знаходити зони стійкості і нестійкості періодичних розв'язків за значеннями власних чисел матриці монодромії (мультиплікаторів) на основі теорії Флоке. Розроблені нові підходи для аналізу можливих шляхів раптового переходу розривної системи до хаосу. На рис. 15 за допомогою перерізів Пуанкаре показані сценарії переходу до хаотичних коливань.

Водночас були проведені дослідження щодо застосування теорії та методів вейвлет-аналізу для отримання якісних динамічних характеристик складних просторових конструкцій в частотно-часовому просторі. За допомогою дискретного та неперервного вейвлет-перетворень був проведений аналіз стохастичних впливів із застосуванням вейвлетів Добеши, Морле, Пауля та Мексиканська шляпа.

Виконано математичне моделювання квазістаціонарного (вітрового) стохастичного впливу у вигляді імовірнісної моделі. Із застосуванням теорії рухомої хвилі і методів вейвлет-аналізу побудована імовірнісна модель нестаціонарного (сейсмічного) стохастичного впливу.

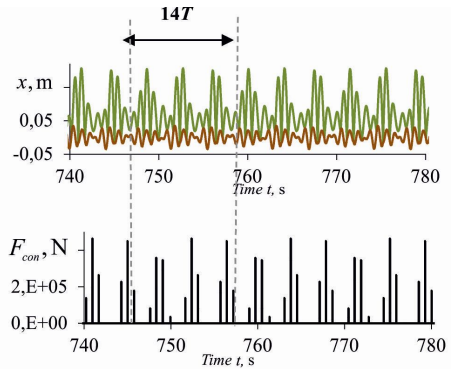


Рис. 14

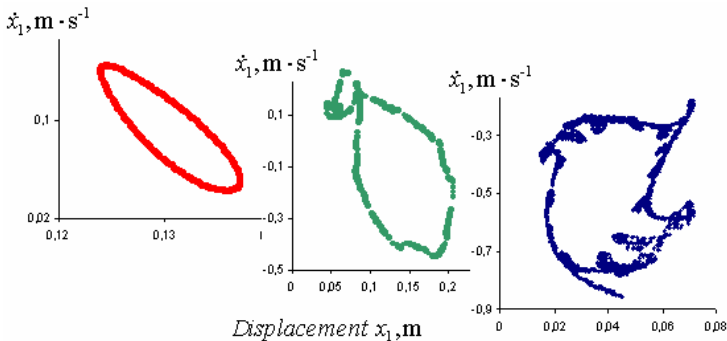


Рис. 15

Виконання НДР «Дослідження процесів нелінійного деформування неоднорідних структур та динамічного руйнування масивних тіл з тріщинами сучасними методами обчислювальної механіки» (науковий керівник д.т.н., проф. Баженов В.А.) розпочато в 2017 р. На 1 етапі НДР розроблені теоретичні основи скінченноелементного аналізу процесів деформування та втрати стійкості тонких пружних оболонок ускладненої геометричної структури з урахуванням переднапруженого стану при визначенні власних частот і форм коливань на кожному кроці статичного

термосилового навантаження та процесів руйнування просторових тіл з тріщинами при статичному і динамічному навантаженнях з урахуванням нелінійної роботи матеріалу. Передбачається розробка комплексного підходу до розв'язання задач нелінійного деформування, стійкості та коливань пружних оболонок неоднорідної структури, до визначення параметрів динамічної механіки руйнування із використанням коректних формулювань  $J$ -інтеграла, як часткового випадку  $T^*$  та  $\Gamma$  інтегралів, та із урахуванням змінності граничних умов на берегах тріщини. Із використанням розроблених підходів передбачається провести аналіз несучої здатності широкого кола відповідальних тонкостінних конструкцій: відсіку ракетиносія (рис. 16,*а*), лопаті гідротурбіни, резервуару с недосконаlostями форми, оболонок з ребрами (рис. 16,*б,в*).

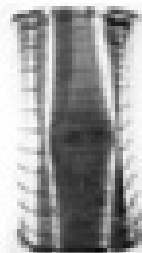
*а**б**в*

Рис. 16

В 2017 р. в НДІБМ було підготовлено і подано на конкурс МОНУ два проекти: «Теорія і методи чисельного дослідження процесів високошвидкісного термов'язкопружнопластичного деформування та дисперсного руйнування конструкцій на основі сучасних



скінченноелементних моделей» (керівник д.т.н, ст.н.с. Солодей І.І.) і «Методи і алгоритми прогнозування критичних станів і катастроф у динамічних системах при дії навантажень ударного і стохастичного характеру» (керівник к.т.н., ст.н.с. Ворона Ю.В.). Науковий доробок авторів кожного із зазначених проєктів складав по 6-7 статей в журналах, що індексуються в науково-метричні бази даних (НМБД), більше 15 статей в фахових виданнях МОНУ, опубліковані монографії у видавництві LAP LAMBERT Academic Publishing на англійській мові, підготовлені підручники і навчальні посібники, що становить підґрунтя для виконання цих НДР. Проєкти посіли 4 і 8 місце серед 18 проєктів, поданих на конкурс за науковим напрямом «Механіка», були віднесені до категорії проєктів високого рівня та внесені до переліку НДР, які передбачається виконувати за рахунок держбюджетного фінансування в 2018-2020 рр.

**Публікація результатів досліджень.** Впродовж існування Наукової школи публікації результатів наукових досліджень приділялась значна увага. Як зазначено вище, в 1965 р. було започатковано видання науково-технічного збірника «Опір матеріалів і теорія споруд», що дозволяло в найкоротший час найбільш повно оприлюднювати результати наукової діяльності. Крім того на базі Київського інженерно-будівельного інституту були проведені I-V Всесоюзні конференції по статистиці та динаміці просторових конструкцій. В подальшому виконані розробки були представлені на інших конференціях на території колишнього СРСР, пізніше – також на міжнародних конференціях в країнах СНД, а також в Австрії, Австралії, Болгарії, Великобританії, США та інших країнах. В цілому за час існування Наукової школи було підготовлено більше 1500 наукових статей і доповідей на конференціях різного рівня, видано біля 50 монографій, присвячених різноманітним проблемам механіки деформівного твердого тіла і будівельної механіки.

Серед найважливіших публікацій останніх років необхідно насамперед відзначити монографії та розділи монографій, які видані в закордонних видавництвах. В монографії «Анализ динамического поведения виброударных систем разных типов. Численные методы исследования» [4] розроблена теоретична база та методика використання методу продовження по параметру для аналізу динаміки і стійкості сильно нелінійних виброударних систем (рис. 17). Стаття «Application of Information Technology in Teaching Structural Mechanics», яка увійшла до складу монографії «Quality, Mobility and Globalization in the Higher Education System: A Comparative Look at the Challenges of Academic Teaching» присвячена проблемам застосування сучасних інформаційних технологій, методів обчислювальної механіки та програмного

забезпечення при проведенні наукових досліджень та в освітніх програмах з будівельної механіки для різних кваліфікаційних рівнів [5], рис. 18. Монографія «Stability and Discontinuous Bifurcations in Vibroimpact Systems. Numerical Investigations» («Стійкість і розривні біфуркації у віброударних системах. Чисельне дослідження») містить детальні результати чисельних досліджень динамічної поведінки вібросистем з жорстким та м'яким впливом з двома ступенями вільності при періодичному збудженні із використанням двох способів моделювання удару співвідношеннями стереомеханічної теорії і силою контактної взаємодії на основі квазістатичної теорії Герца та оцінюється можливість використання цих підходів. [6], рис. 19. Монографія «Structural mechanics and theory of structures. History essays» («Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії») висвітлює історію виникнення і становлення понять, принципів, ідей, задач будівельної механіки і методів їх розв'язання та може бути використана студентами вищих навчальних закладів при реалізації магістерських програм і вивченні спеціальних курсів [7], рис. 20. Монографія «Continuum mechanics: semi-analytical finite element method» (автори Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І.) підготовлена англійською мовою, подана до видавництва Cambridge Scientific Publisher, London, запланована до друку в 2018 р.

Також варто відзначити низку статей в міжнародних наукових журналах Applied Mathematics and Nonlinear Sciences (рис.21), Journal of Applied Nonlinear Dynamics (рис. 22), MOTROL – An International Journal on Operation of Farm and Agri-Food Industry Machinery [8-13], а також в міжнародних наукових журналах НАН України “Прикладная механика” (International Applied Mechanics – Springer ), ”Проблемы прочности” (Strength of Materials - Springer) [14-20].

Статистика публікацій за останні 5 років наведена в таблиці.

	2013	2014	2015	2016	2017
Статті в журналах, що індексуються в НМБД	9	6	3	7	7
Статті в фахових виданнях МОНУ	18	24	21	13	23
Монографії	3	1	1	-	5
Підручники і навчальні посібники	1	3	-	1	1



Рис. 17

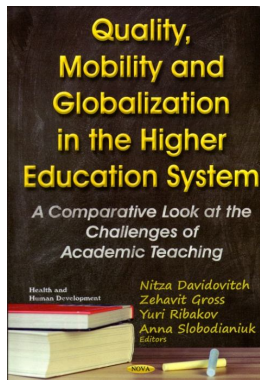


Рис. 18

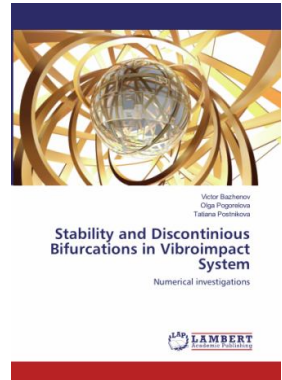


Рис. 19

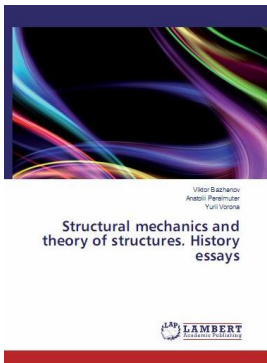


Рис. 20



Рис. 21



Рис. 22

Крім того, за останні 5 років було видано декілька монографій українською мовою, які присвячені проблемам чисельного розв'язання просторових задач механіки деформівного твердого тіла [21, 22] і історії становлення і розвитку методів розв'язання задач будівельної механіки [23, 24], рис. 23-26. Зокрема, в 2017 р. видані монографії «Чисельне дослідження процесів нелінійного статичного і динамічного деформування просторових тіл» і «Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах механіки руйнування просторових тіл з тріщинами», які містять викладення методик і результатів розв'язання нових важливих задач нелінійного деформування просторових тіл при тривалих статичних і динамічних навантаженнях, а також задач тріщиностійкості просторових тіл із використанням засобів комп'ютерної механіки [23, 24], рис. 27, 28.

Викладені в перелічених монографіях теоретичні положення, методики розв'язання задач та результати можуть бути використані науково-технічними працівниками в галузі механіки деформівного твердого тіла і суміжних галузях, проектувальниками відповідальних об'єктів енергетичного та транспортного машинобудування, будівництва, а також викладачами, докторантами, аспірантами, магістрами в науковій і виробничій діяльності.

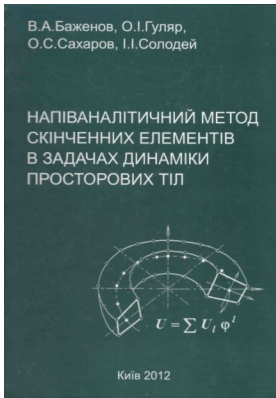


Рис. 23

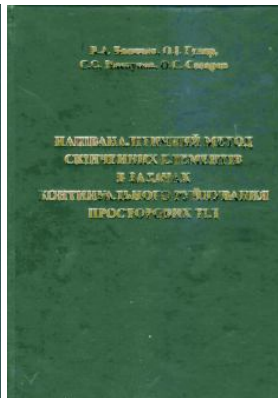


Рис. 24

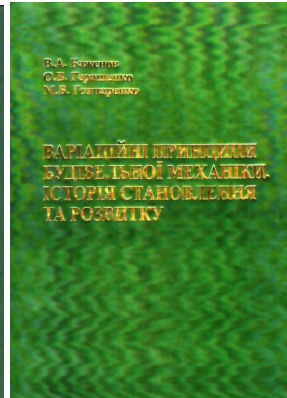


Рис. 25

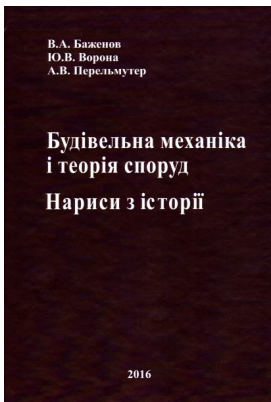


Рис. 26

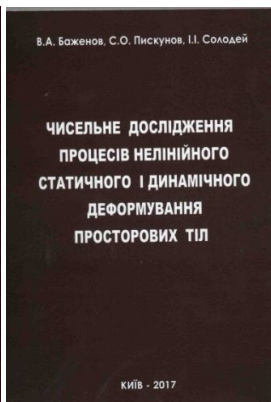


Рис. 27

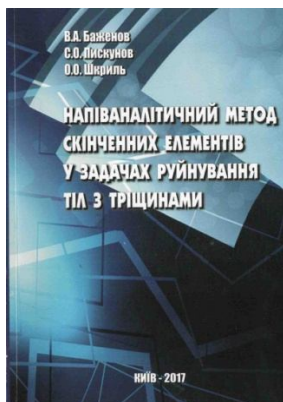


Рис. 28

Найбільш значимі результати наукових досліджень були викладені в узагальнюючих статтях, опублікованих у виданні «Успехи механіки», яке об'єднало серію статей, опублікованих у журналі «Прикладная механика»

з 2000 року та присвячених початку III-го тисячоліття. В підготовці статей взяли участь вчені 26 країн світу (Австрія, Азербайджан, Англія, Болгарія, Вірменія, Ізраїль, Іспанія, Італія, Казахстан, Канада, Китай, Колумбія, Латвія, Мексика, Німеччина, Польща, Росія, Словаччина, США, Туреччина, Угорщина, Узбекистан, Україна, Франція, Чехія та Шотландія). Статті були видані англійською мовою [27-29].

На базі КНУБА та НДІБМ у співпраці з НПО «SCADSOFTE» з 2015 р. щорічно проводяться міжнародні науково-технічні конференції «Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі». Робота конференції організована в двох секціях: «Фундаментальні і прикладні проблеми механіки деформівного твердого тіла» (голова д.т.н, проф. Баженов В.А.) і «Сучасні проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій» (голова д.т.н., ст.н.с. Перельмутер А.В.). Конференція проходить за участю науковців з Литви, Німеччини, Польщі, Росії.

**Міжнародна діяльність.** НДІ БМ проводить широке міжнародне співробітництво з виконання спільних наукових досліджень та підготовки кадрів з Сіанським металургійним та інженерно-будівельним інститутом (Китай), Технічним університетом міста Брауншвейг (Німеччина). Співробітники НДІБМ проходили стажування за кордоном, зокрема в університеті м.Інсбрук (Австрія), Бохумському технічному університеті (Німеччина). Також має місце наукове співробітництво з Інститутом досліджень звуку і вібрації (Англія), Хоуренським технологічним університетом, Нью-Йоркським міським університетом, університетом Ротжерс (США), Католицьким університетом (Бразилія), Університетом Ньюкастлу (Австралія).

В 2017 р. за участю співробітників НДІБМ підготовлені і представлені до участі в конкурсах проекти:

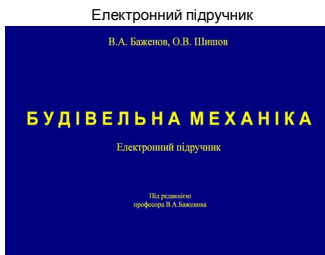
- в рамках програми HORIZONT-2020, напрям INFRASUPP-02-2017: «International Scientific Cooperation for Research Infrastructures (RI) in the Realm of Nonlinear Dynamics» (ISCRINOD) («Міжнародне наукове співробітництво для дослідження інфраструктурних об'єктів методами нелінійної динаміки») – у співпраці із Potsdam Institute For Climate Impact Research, Universidad Politécnica De Cartagena, Ventpils University College, Engineering Research Institute “ VSRC.

- в рамках програми «ERASMUS+»: «Innovative Structural integrity courses for training of specialists in Civil and Mechanical Engineering on multimedia platform (ISIC-CME)» («Іноваційні навчальні курси для підготовки фахівців в галузі будівництва і механічної інженерії») – у співпраці із Lublin University of Technology, TVE Mernokiroda Kft. (TVE\_Engineering), Ecole Nationale d'Ingénieurs de Metz, France.

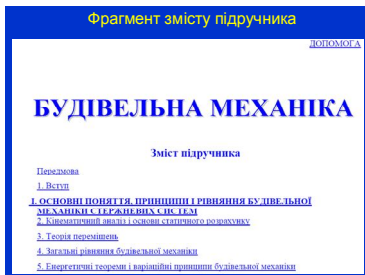
## Впровадження результатів науково-дослідних робіт у навчальний процес.

Результати науково дослідних робіт постійно впроваджуються у навчальний процес шляхом розробки спеціалізованих програмних засобів, призначених для пред'явлення і контролю засвоєної студентами навчальної інформації, програмних засобів для виконання студентами розрахункових робіт. До таких програмних засобів можна віднести електронний підручник, електронний навчальний посібник, програмний комплекси АСИСТЕНТ, КОНТРОЛЬ та ОЛІМПІАДА. Всі програмні розробки розташовано на сайті КНУБА і вільний доступ до них не обмежено.

Наведемо кілька ілюстрацій до вище зазначеного.



Титульна сторінка електронного підручника



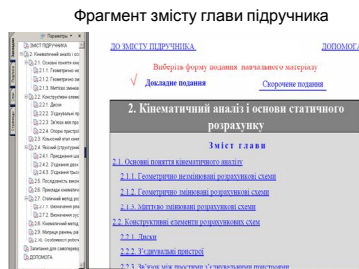
Фрагмент змісту електронного підручника

Кожен рядок у змісті являє собою гіперпосилання і вибір того чи іншого рядка призводить до появи відповідного фрагмента підручника.

### Розділи підручника

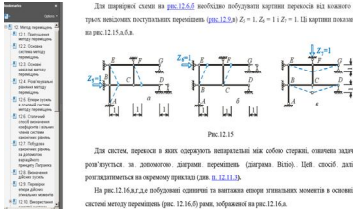
- I. Основні поняття, принципи та рівняння будівельної механіки стержневих систем
- II. Розрахунок стержневих систем методом скінчених елементів
- III. Розрахунок статично визначуваних систем
- IV. Розрахунок статично невизначуваних систем
- V. Основи динаміки та стійкості споруд
- VI. Метод скінчених елементів для двовимірних систем
- VII. Розрахунок на рухомі навантаження
- VIII. Навчальні програмні комплекси

### Список розділів електронного підручника



Фрагмент змісту окремої глави електронного підручника

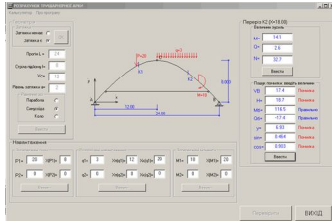
Фрагмент сторінки підручника



Зразок фрагменту підручника

- Програмний комплекс АСИСТЕНТ встановлюється як у комп'ютерних класах, так і на власних комп'ютерах студентів
- Програмний комплекс АСИСТЕНТ призначено
- Для розв'язання лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь
  - Для виконання матричних операцій у процесі розрахунку
  - Для виконання розрахункових робіт студентами будівельних та архітектурних спеціальностей
  - Для виконання статичних динамічних розрахунків будівельних конструкцій при виконанні курсових та дипломних проєктів
  - Для самотестування рівня знань та умінь в галузі будівельної механіки

Функції програмного комплексу АСИСТЕНТ



Робоче вікно однієї з прикладних програм комплексу, яка перевіряє правильність фрагментів розрахунку тришарнірної арки студентами

ПК КОНТРОЛЬ

Програмне забезпечення для комп'ютерного тестування призначено для перевірки знань та умінь у галузі будівельної механіки в комп'ютерних класах, оснащених локальною комп'ютерною мережею.

Функції ПК КОНТРОЛЬ

Електронний навчальний посібник

В.А.Валіков, Г.М.Захаров  
О.В.Шинка, С.С.Полухов

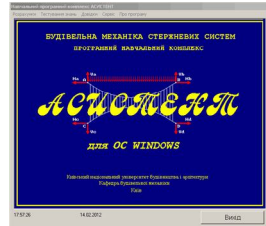
БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА

Розраховуючи роботу. Задати. Комп'ютерне тестування

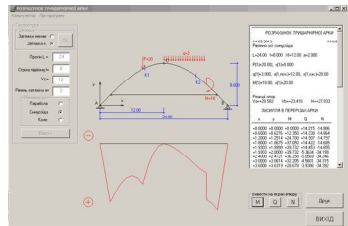
Електронний навчальний посібник

Київ - 2013

Титульна сторінка електронного навчального посібника



Заставка ПК АСИСТЕНТ. Керування роботою комплексу здійснюється за допомогою спадних меню

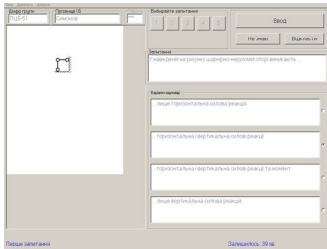


Робоче вікно видачі повних результатів, якщо контрольні результати фрагментів розрахунку правильні

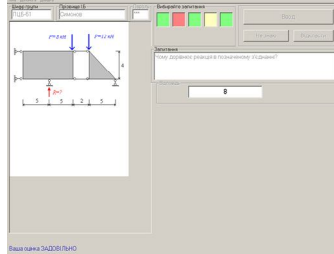


Заставка ПК КОНТРОЛЬ

Приклад запитання з вибірковою відповіддю



Приклад запитання з фіксованою відповіддю



Робочі вікна комплексу КОНТРОЛЬ для запитань з вибірковою та фіксованою відповіддю

### Компакт-диск з кафедральними розробками



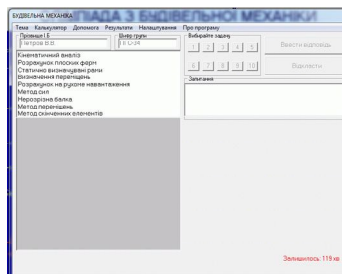
Наведені програмні засоби зібрано на компакт-диску

Заставка програми для проведення олімпіади



Заставка ПК ОЛІМПІАДА

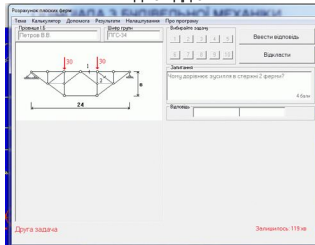
Робоче вікно з темами



Робоче вікно з темами, які винесено на поточну олімпіаду (список тем можна змінювати через спадні меню)



Робоче вікно для задачі з фіксованою відповіддю



Приклад робочого вікна ПК ОЛІМПІАДА з одним із питань, яке потребує фіксовану відповідь

Короткі результати олімпіади

Олімпіада з дисципліни «БУДІВЕЛЬНА МЕХАНІКА»					16.01.2016
Студент	Пункти	Учаски балів	% бала	Місце	
1. Дідух	108	72	72	78	
2. Момчи Катерина Класи	108	72	72	78	
3. Гринченко В. О.	101	70	70	75	
4. Мельник А. О.	95	66	66	67	
5. Подорожний Євген І.	95	66	66	67	
6. Мартинюк В. О.	91	63	63	66	
7. Сидоренко Андрій Ігор	86	60	60	62	
8. Ткач Іван Валерійович	88	61	61	64	
9. Пестерев В. М.	87	60	60	62	
10. Мельник В. С.	87	60	60	62	
11. Мельник А. О.	75	51	51	46	
12. Волоскіан А. В.	49	33	33	35	
13. Турчин В. О.	34	23	23	19	
14. Пилипак В. С.	31	21	21	17	
15. Пилипак В. С.	29	19	19	16	
16. Сітур Андрій Іванович	28	19	19	16	
17. Турчин В. С.	29	19	19	16	
18. Бундзяк В. В.	36	24	24	20	

Короткі результати поточної олімпіади, які автоматично формуються програмою. За необхідністю на екран можна вивести докладні результати кожного учасника

На програмні розробки Електронний підручник з будівельної механіки, Електронний посібник з будівельної механіки, програмний комплекс АСИСТЕНТ авторами одержано авторські свідоцтва.

Одним із результатів роботи наукової школи є видання підручників і навчальних посібників:

- В.А. Баженов, С.Я. Гранат, О.В. Шишов. Будівельна механіка. Комп'ютерний курс. Підручник. – К.: ПАТ ВІПОЛ, 1999.
- В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології. Підручник. – К.: Каравела, 2009.
- В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, О.В. Шишов. Будівельна механіка. Комп'ютерні технології і моделювання. Підручник. – К.: ПАТ ВІПОЛ, 2013.
- В.А. Баженов, Г.М. Іванченко, О.В. Шишов, С.О. Пискунов. Будівельна механіка. Розрахункові вправи. Навчальний посібник. – К.: Каравела, 2006, 2007, 2010.

Поряд із класичним курсом будівельної механіки підручники містять цілком нові розділи: «Сучасні програмні комплекси, що базуються на методі скінчених елементів», «Нелінійні задачі будівельної механіки», «Основи надійності споруд», «Задачі статистичної динаміки», «Експериментальні методи будівельної механіки». Крім того в суттєво розширеному вигляді висвітлюються енергетичні теореми і варіаційні принципи будівельної механіки.



Видані підручники з будівельної механіки

Розробки кафедри увійшли до складу науково-методичного комплексу «Створення інноваційно-зорієнтованої моделі та умов для підготовки фахівців будівельної галузі з урахуванням можливостей сучасних матеріалів і технологій» (автори Баженов В.А., Іваній Н.І., Куліков П.М., Муравицький О.А., Паржницький В.В., Сакало Л.Я., Серебрянський С.М., Соха В.Г., Штиця Ю.М.), яка відзначена в 2013 р. Державною премією України у галузі освіти.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кобієв В.Г.* Давід Веніамінович Вайнберг. Короткий біографічний нарис. – К.: КНУБА, 2002. – 59 с.
2. *Баженов В.А., Кобієв В.Г.* Кафедра будівельної механіки і науково-дослідний інститут будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури: Короткий історичний нарис (1930-2000 р.) – К.: КНУБА, 2002. – 80 с.
3. *Баженов В.А., Кобієв В.Г.* Кафедра будівельної механіки і науково-дослідний інститут будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури: Короткий історичний нарис (1930-2005 р.) – К.: КНУБА, 2005. – 108 с.
4. *Баженов В.А., Погорелова Т.Г., Постникова О.С.* Анализ динамического поведения виброударных систем разных типов. Численные методы исследования. LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbruken, Deutschland, 2013. – 130 p.
5. *Bazhenov V.A., Vorona Yu.V., Shishov O.V.* Application of Information Technology in Teaching Structural Mechanics // Quality, Mobility and Globalization in the Higher Education System: A Comparative Look at the Challenges of Academic Teaching. In N. Davidovitch, Z. Gross, Yu. Ribakov, A. Slobodianiuk (Eds.). - New York: Nova Science, 2016. - Chapter 18, pp. 137-142.
6. *Bazhenov V.A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Stability and Discontinuous Bifurcations in Vibroimpact Systems. Numerical Investigations». – LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbruken, Deutschland, 2007. – 112 p.
7. *Bazhenov V.A., Perelmuter A.V., Vorona Yu.V.* Structural mechanics and theory of structures. History essays. – LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbruken, Deutschland, 2017. - 580 p.

8. *Bazhenov V.A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Contact Impact Forces at Discontinuous 2-DOF Vibroimpact System // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. 2016; v.1(1). - PP. 183–196.
9. *Bazhenov V.A., Lizunov P. P., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Numerical Bifurcation Analysis of Discontinuous 2-DOF Vibroimpact System. Part 2: Frequency-Amplitude response.// Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2016 v.5(3), PP. 76-87.
10. *Bazhenov V.A., Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Otrasheskaia V.V.* Stability and Bifurcations Analysis for 2-DOF Vibroimpact System by Parameter Continuation Method. Part I: Loading Curve // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2015. – V. 4. – №.4. – PP. 357-370.
11. *Bazhenov V.A., Pyskunov S.O.* A finite element technique and results of continual fracture process modeling // MOTROL – An International Journal on Operation of Farm and Agri-Food Industry Machinery, 2014. Vol. 16, No 8. PP.21-28.
12. *Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Shkryl A.A.* Modelling of crack growth process in spatial // MOTROL – An International Journal on Operation of Farm and Agri-Food Industry Machinery, 2014. Vol. 16, No 8. PP.29–36.
13. *Bazhenov V.A., Pogorelova O. S., Postnikova T. G.* Comparison of Two Impact Simulation Methods Used for Nonlinear Vibroimpact Systems with Rigid and Soft Impacts // Journal of Nonlinear Dynamics, vol. 2013, Article ID 485676, 12 p., 2013.
14. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Андриевский В.П.* Определение расчетного ресурса хвостовика лопатки газотурбинной установки под действием термосилового нагружения // Проблемы прочности. - №.3, 2013. - С.105-129.
15. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Солодей И.И.* Численное моделирование динамических процессов упруго-пластического взаимодействия неоднородных пространственных тел на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 1. Расчетные соотношения полудналитического метода конечных элементов и алгоритмы исследования переходных процессов динамического деформирования неоднородных призматических тел и тел вращения // Проблемы прочности. – №.5, 2013. – С. 13-27.
16. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Солодей И.И.* Численное моделирование динамических процессов упруго-пластического взаимодействия неоднородных пространственных тел на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 2. Исследование динамического деформирования пространственных конструкций сложной формы // Проблемы прочности. - №.1, 2014. - С. 31-38.
17. *Баженов В.А., Лук'яненко О.О., Костіна О.В., Геращенко О.В.* Імовірнісний підхід до визначення надійності за стійкістю недосконалої оболонки-опори // Проблемы прочности. – 2014, №4. – С.152-161.
18. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Модификация метода продолжения решения по параметру для анализа динамики виброударных систем // Проблемы прочности. – 2014, №6. – С.101-110.
19. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Максимюк Ю.В., Шкрьель А.А.* Модифицированный метод определения инвариантного  $J$ -интеграла в конечно-элементных моделях призматических тел. // Прикладная механика, 2016. – т.52. – №2. – С. 46-54.
20. *Баженов В.А., Лук'яненко О.О., Костіна О.В., Геращенко О.В.* Нелінійна стійкість довгої гнучкої циліндричної оболонки з недосконалотями при згині // Проблемы прочности, 2016. – № 2. – С. 140 – 147.
21. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах континуального руйнування просторових тіл. – К.: Каравела, 2014. – 236 с.
22. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах динаміки просторових тіл. – Київ, 2012. – 248 с.
23. *Баженов В.А., Геращенко О.В., Гончаренко М.В.* Варіаційні принципи будівельної механіки: Історія становлення та розвитку // К.: Каравела, 2014. – 877 с.

24. *Баженов В.А., Ворона Ю.В., Перельмутер А.В.* Будівельна механіка і теорія споруд. Нариси з історії // К., Каравела, 2016. – 580 с.
25. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І.* Чисельне дослідження процесів нелінійного статичного і динамічного деформування просторових тіл. – К.: Каравела, 2017. – 306 с.
26. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Шкриль О.О.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах механіки руйнування просторових тіл з тріщинами. – К.: Каравела, 2017. – 208 с.
27. *Баженов В.А., Сахаров А.С., Цыхановский В.К.* Моментная схема метода конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Успехи механики. В 6 томах./ Под.ред А.Н.Гузя. – т.3. – 2007 –С.335-372.
28. *Баженов В.А., Гуляр А.И.* Полуаналитический метод конечных элементов в задачах нелинейной механики сплошной среды // Успехи механики. В 6 томах./ Под.ред А.Н. Гузя. – т.4. – 2008 –С.221-257.
29. *Баженов В.А., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих неоднородных оболочек при термосиловых нагрузках // Успехи механики, т. 6, кн. 2. – Литера Лтд, 2012 – С. 609-645.

## REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Kobiiev V.G.* David Veniaminovich Vainberg. Korotkyi biohrafichnyi narys (David Veniaminovich Vainberg. Brief biographical essay). – К.: KNUBA, 2002. – 59 s.
2. *Bazhenov V.A., Kobiiev V.G.* Kafedra budivelnoi mekhaniky i naukovo-doslidnyi instytut budivelnoi mekhaniky Kyivskoho natsionalnoho universytetu budivnytstva i arkhitektury: Korotkyi istorychnyi narys (1930-2000 rr.) (Department of structural mechanics and research institute of structural mechanics of Kiev National University of Construction and Architecture: Brief historical essay (1930-2000)) – К.: KNUBA, 2002. – 80 s.
3. *Bazhenov V.A., Kobiiev V.G.* Kafedra budivelnoi mekhaniky i naukovo-doslidnyi instytut budivelnoi mekhaniky Kyivskoho natsionalnoho universytetu budivnytstva i arkhitektury: Korotkyi istorychnyi narys (1930-2005 rr.) (Department of structural mechanics and research institute of structural mechanics of Kiev National University of Construction and Architecture: Brief historical essay (1930-2005)) – К.: KNUBA, 2005. – 108 s.
4. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Analiz dinamicheskogo povedeniya vibroudarnykh sistem raznykh tipov. Chislennyye metody issledovaniya (Dynamic behavior analysis of different types vibroimpact systems. Numerical methods of research). – LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbruken, Deutschland, 2013. – 130 p.
5. *Bazhenov V.A., Vorona Yu.V., Shishov O.V.* Application of Information Technology in Teaching Structural Mechanics // Quality, Mobility and Globalization in the Higher Education System: A Comparative Look at the Challenges of Academic Teaching. In N. Davidovitch, Z. Gross, Yu. Ribakov, A. Slobodianuk (Eds.). – NewYork: Nova Science, 2016. – Chapter 18, pp. 137-142.
6. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Stability and Discontinuous Bifurcations in Vibroimpact Systems. Numerical Investigations. – LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbruken, Deutschland, 2007. – 112 p.
7. *Bazhenov V.A., Perelmuter A.V., Vorona Yu.V.* Structural mechanics and theory of structures. History essays. – LAP LAMBERT Academic Publishing, Saarbruken, Deutschland, 2017. – 580 p.
8. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Contact Impact Forces at Discontinuous 2-DOF Vibroimpact System // Applied Mathematics and Nonlinear Sciences. 2016; v.1(1). -PP. 183–196.
9. *Bazhenov V.A., Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Numerical Bifurcation Analysis of Discontinuous 2-DOF Vibroimpact System. Part 2: Frequency-Amplitude response.// Journal of Applied Nonlinear Dynamics. 2016 v.5(3), PP. 76-87.

10. *Bazhenov V.A., Lizunov P.P., Pogorelova O.S., Postnikova T.G., Otrashesvskaia V.V.* Stability and Bifurcations Analysis for 2-DOF Vibroimpact System by Parameter Continuation Method. Part I: Loading Curve // Journal of Applied Nonlinear Dynamics. – 2015. – V. 4. – №.4. – PP. 357-370.
11. *Bazhenov V.A., Pyskunov S.O.* A finite element technique and results of continual fracture process modeling // MOTROL – An International Journal on Operation of Farm and Agri-Food Industry Machinery, 2014. Vol. 16, No 8. PP.21-28.
12. *Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Shkryl' A.A.* Modelling of crack growth process in spatial // MOTROL – An International Journal on Operation of Farm and Agri-Food Industry Machinery, 2014. Vol. 16, No 8. PP.29-36.
13. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Comparison of Two Impact Simulation Methods Used for Nonlinear Vibroimpact Systems with Rigid and Soft Impacts // Journal of Nonlinear Dynamics, vol. 2013, Article ID 485676, 12 p., 2013.
14. *Bazhenov V. A., Gulyar A. I., Piskunov S. O., Andrievskii V. P.* Design life assessment of the blade root of a gas turbine unit under thermomechanical loading // Strength of Materials, 2013, Volume 45, Issue 3, PP. 329–339.
15. *Bazhenov V. A., Gulyar A. I., Solodei I.I.* Numerical Simulation of Dynamic Processes of Elastoplastic Interaction between Three-Dimensional Heterogeneous Bodies on the basis of Semi-Analytical Finite Element Method. Part 1. Computational Relationships of the Semi-Analytical Finite Element Method and Algorithms for the Study of Transient Processes of Dynamic Deformation of Heterogeneous Prismatic Bodies and Bodies of Revolution // Strength of Materials, 2013, Volume 45, Issue 5, PP. 523–533.
16. *Bazhenov V. A., Gulyar A. I., Solodei I.I.* Numerical Simulation of Dynamic Processes of Elastoplastic Interaction between Three-Dimensional Heterogeneous Bodies on the Basis of Semi-Analytical Finite Element Method. Part 2. A Study of the Dynamic Deformation of Complex-Shaped Three-Dimensional Structures // Strength of Materials, 2014, Volume 46, Issue 1, PP. 80–87.
17. *Bazhenov V.A., Luk'yanchenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V.* Probabilistic Approach to Determination of Reliability of an Imperfect Supporting Shell // Strength of Materials, 2014, Volume 46, Issue 4, PP 567–574.
18. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* Modification of the One-Parameter Numerical Continuation Method for Analysis of the Dynamics of Vibroimpact Systems // Strength of Materials, 2014, Volume 46, Issue 6, PP 801–809.
19. *Bazhenov V.A., Sakharov A.S., Maksimyyuk Yu.V., Shkryl' A.A.* A Modified Method for Evaluating the Invariant J-Integral in Finite-Element Models of Prismatic Bodies // International Applied Mechanics. 2016, Volume 52, Issue 2, PP 140–146.
20. *Bazhenov V.A., Luk'yanchenko O.O., Kostina O.V., Gerashchenko O.V.* Nonlinear Bending Stability of a Long Flexible Cylindrical Shell with Geometrical Imperfections // Strength of Materials, 2016, Volume 48, Issue 2, PP 308–314.
21. *Bazhenov V.A., Guliar O.I., Pyskunov S.O., Sakharov O.S.* Napivanalitichnyi metod skinchennykh elementiv v zadachakh kontynualnogo ruinovannia prostorovykh til (Semianalytical finite element method in the problems of spatial bodies continual fracture). – K.: Karavela, 2014. – 236 s.
22. *Bazhenov V.A., Guliar O.I., Sakharov O.S., Solodei I.I.* Napivanalitichnyi metod skinchennykh elementiv v zadachakh dynamiky prostorovykh til (Semianalytical finite element method in the problems of spatial bodies dynamics). – Kyiv, 2012. – 248 s.
23. *Bazhenov V.A., Ger. – ashchenko O.V., Goncharenko M.V.* Variatsiini pryntsyipy budivelnoi mekhaniky. Istoriia stanovlennia ta rozvytku (Variational principles of structural mechanics. History of formation and development). – K.: Karavela, 2014. – 877 s.
24. *Bazhenov V.A., Vorona Yu.V., Perelmuter A.V.* Budivelna mekhanika i teoriia sporud. Narysy z istorii (Structural mechanics and theory of structures. History essays). – K., Karavela, 2016. – 580 s.

25. *Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Solodei I.I.* Chyselne doslidzhennia protsesiv nelineinoho statychnoho i dynamichnoho deformuvannia prostorovykh til (Numerical analysis of spatial bodies nonlinear static and dynamic deformation). – K.: Karavela, 2017. – 306 s.
26. *Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Shkryl' O.O.* Napivanalitichnyi metod skinchenykh elementiv v zadachakh mekhaniky ruinuвання prostorovykh til z trishchynamy (Semianalytical finite element method in the problems of spatial bodies with cracks fracture). – K.: Karavela, 2017. – 208 s.
27. *Bazhenov V.A., Saharov A.S., Tsyhanovskiy V.K.* Momentnaya shema metoda konechnykh elementov v zadachah nelineynoy mehaniki sploshnoy srody (Moment scheme of the finite element method in problems of nonlinear continuum mechanics) // *Uspehi mehaniki. V 6 tomah / Pod.red A.N.Guzya.* – t.3. – 2007 – S.335-372.
28. *Bazhenov V.A., Guliar A.I.* Poluanaliticheskiy metod konechnykh elementov v zadachah nelineynoy mehaniki sploshnoy srody (Semianalytical finite element method in the problems of nonlinear continuum mechanics) // *Uspehi mehaniki. V 6 tomah / Pod.red A.N. Guzya.* – t.4. – 2008 – S.221-257.
29. *Bazhenov V.A., Solovey N.A.* Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih neodnorodnykh obolochek pri termosilovykh nagruzkah (Nonlinear deformation and stability of elastic inhomogeneous shells under thermal loadings) // *Uspehi mehaniki, t. 6, kn. 2.* – Litera Ltd, 2012 – S. 609–645.

Bazhenov V.A., Vorona Yu. V., Lizunov P.P., Pyskunov S.O., Shishov O.V.

SCIENTIFIC SCHOOL OF STRUCTURAL MECHANICS IN KYIV NATIONAL UNIVERSITY OF CONSTRUCTION AND ARCHITECTURE

The history of the founding and development of the scientific school of structural mechanics of the Kiev National University of Construction and Architecture, whose origin is associated with the creation in 1961 of the Research Laboratory of thin-walled spatial structures, is highlighted. The main stages of the path passed by the scientific team of the Research Laboratory were studied, on the basis of which the Institute of Structural Mechanics was created subsequently. It is noted that the main tasks of the scientific school were and are the development of methods and algorithms for numerical analysis for solving the continuum mechanics problems, focused on the use of computer technology, as well as the development of automated systems for calculating of structures in various fields of technology. In our time the staff of the Institute of Structural Mechanics and the Department of Structural Mechanics conduct the relevant fundamental and applied research on the theory and methods of calculations for the strength, stability and oscillation of complex spatial structures under the influence of external influences of various physical nature and the creation of problem-oriented and object-oriented software on this basis. The results are applying for determining of the bearing capacity of building structures and construction, their separate parts, as well as the responsible elements of structures of machines used in various fields of technology. Comprehensive research by scholars was awarded with State Prize of Ukraine. The examples of various responsible structures, energy and mechanical engineering objects for the comprehensive study of which the developed mathematical and software software was applied are presented in the article. It is noted that the scientific staff of the Department and the Institute conducts extensive international cooperation on the implementation of joint research and training. Foreign searchers occupy a prominent place in a wide range of scholars who defended their Ph.D. and Doctoral Science theses within these studies. It is emphasized that the results of research work are being implemented in the educational process constantly. Specialized software, intended for the teaching of educational information (electronic textbook, electronic tutorial) for students to perform settlement work (software complex ASSISTANT), as well as for knowledge control (software CONTROL and OLIMPIAD) are briefly characterized.

Баженов В.А., Ворона Ю.В., Лизунов П.П., Пискунов С.О., Шишов О.В.  
**НАУЧНАЯ ШКОЛА СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ КИЕВСКОГО НАЦИОНАЛЬНОГО  
УНИВЕРСИТЕТА СТРОИТЕЛЬСТВА И АРХИТЕКТУРЫ**

Освещается история создания и развития научной школы строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры, зарождение которой связывается с созданием в 1961 г. Научно-исследовательской лаборатории тонкостенных пространственных конструкций. Прослежены основные этапы пути, пройденного научным коллективом лаборатории, на базе которой впоследствии был создан НИИ строительной механики. Отмечается, что основными задачами научной школы были и есть разработка ориентированных на использование компьютерной техники методов и алгоритмов численного анализа для решения задач механики деформируемых тел, а также разработка автоматизированных систем расчета конструкций в различных отраслях техники. Подчеркнута тесная связь научно-исследовательских работ с учебным процессом кафедры строительной механики.

*Баженов В.А., Ворона Ю.В., Лизунов П.П., Пискунов С.О., Шишов О.В. Наукова школа будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99. – С. 3 – 32.*

*Висвітлюється історія заснування і розвитку наукової школи будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури. Прослідковано основні етапи шляху, пройденого науковим колективом.*

Л. 28. Бібліогр. 29 назв.

*Bazhenov V.A., Vorona Yu. V., Lizunov P.P., Pyskunov S.O., Shishov O.V. Structural mechanics scientific school in Kyiv National University of Construction and Architecture // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue 99. – P. 3 – 32.*

*History of the foundation and development of the scientific school of structural mechanics in Kyiv National University of Construction and Architecture is highlighted. The main stages of the path passed by the scientific team are considered.*

*Баженов В.А., Ворона Ю.В., Лизунов П.П., Пискунов С.О., Шишов О.В. Научная школа строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вип. 99. – С. 3 – 32.*

*Освещается история создания и развития научной школы строительной механики Киевского национального университета строительства и архитектуры. Прослежены основные этапы пути, пройденного научным коллективом.*

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки КНУБА Баженов Віктор Андрійович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельної механіки, Баженову В.А.

**Роб. тел.:** +38(044) 241-54-12;

**Мобільний тел.:** +38(050) 351-66-21.

**E-mail:** vikabazh@ukr.net

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ВОРОНА Юрій Володимирович

**Адреса робоча:** 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, КНУБА, ВОРОНИ Ю.В.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-54-12

**Мобільний тел.:** +38(050) 750-13-61

**E-mail:** yuvv@ukr.net

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, заступник директора НДІ будівельної механіки КНУБА Лізунов Петро Петрович

**Адреса робоча:** 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, КНУБА, НДІ будівельної механіки, Лізунову П.П.

**Робочий тел.:** +38(044) 248-30-53

**Мобільний тел.:** +38(095) 151-67-87; +38(067) 921-70-05

**E-mail:** lizunov@knuba.edu.ua

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки КНУБА Пискунов Сергій Олегович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, КНУБА, Пискунову С.О.

**Роб. тел.** +38(044) 241-5555;

**мобільний тел.:** +38(050) 962-66-14.

**E-mail** s\_piskunov@ua.fm

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри будівельної механіки КНУБА Шишов Олег Володимирович

**Адреса робоча:** 03680, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, КНУБА, Шишову О.В.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-5549

**Мобільний тел.:** +38(066) 785-54-19

**E-mail:** shishovov@ukr.net



УДК 539.3

## A METHODOLOGY OF DETERMINING OF PARAMETER $J^*$ IN DISCRETE MODELS OF FINITE ELEMENT METHOD

V.A. Bazhenov,  
Dr. Sci.

S.O. Pyskunov,  
Dr. Sci.

O.O. Shkryl',  
Ph.D.

*Kyiv National University of construction ana Architecture, Kyiv  
Povitroflotsky ave., 31, Kyiv, 03680*

Based on the method of reactions, a technique for determining of the parameter  $J^*$  by the method of subdomain moving in discrete models of finite element method (FEM) has been developed. A number of test problems solved. The obtained results confirm the effectiveness of the technique.

**Keywords:** fracture mechanic, semi-analytical finite element method,  $J^*$  parameter, method of reaction.

**Introduction.** The solution of fracture mechanics problems of determination of the stress-strain state and the bearing capacity of the bodies with cracks is devoted in a large number of scientific publications as a fundamental nature, for example, [3, 5, 9] and those which containing solutions of partial questions. Taking into account the necessity of modeling of the behavior of complex form bodies with cracks, the essential heterogeneity of the distribution of stresses and displacements in the crack tip vicinity and the possibility of nonlinear deformations of plasticity the finite element method (FEM) is the most effective in solving of these problems. The use of FEM requires the development of special methods for calculating of the criterion parameters of the fracture mechanics - stress intensity factor (CIF), Cherepanov-Rice  $J$ -integral and also the intensity of energy of the formation of new surfaces of the crack (Griffiths  $G$ -criterion). Among the methods for determining of fracture mechanics parameters on the basis of FEM energy approaches are most widely used. Authors of this article conducted numerous studies that showed the effectiveness of the method of reactions in the implementation of the energy approach. However, the question of determining of the Cherepanov-Rice's  $J$ -integral [1, 2, 4] is considered in these studies. It is well known that in case of the presence of volume forces of different nature, the  $J$ -integral cannot be used to evaluate the crack resistance. The Griffith parameter ( $G$ ) can be used as a parameter of fracture mechanics in this case. The method of determining of  $G$  using the reaction method is described

in [8]. For the case of volume forces caused by the effect of temperature influences, the parameter  $J^*$  is proposed as a parameter of fracture [5, 6, 9]. A new approach based on the reaction method for determine the parameter  $J^*$  is developed in this paper.

**1. Technique for  $J^*$  evaluation.** In accordance to [5, 6, 9] under termoforce loading the value of parameter  $J^*$  is calculated using of formula:

$$J^* = J + \int_V \alpha \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \frac{\partial T}{\partial x} dV. \quad (1)$$

The first component – the Cherepanov-Rice integral  $J$  – is determined by contour integration  $S$  covering the domain  $V$ :

$$J = \int_S \left( W n_i - \sigma^{ij} \frac{\partial u}{\partial x} n_j \right) dS. \quad (2)$$

The second component is determined by integration the internal volume of the region  $V$ .

The generalized version of the method of reactions, which based on the calculation of volume invariant integrals, is adopted as a basis for the determination of  $J^*$  in this paper. This method is similar to the approach outlined in [8].

In contrast to the calculation procedure of  $G$ , which involves changing the length of the crack  $l_{cr}$ , when calculating the parameter  $J^*$  the length of the crack is fixed. The substituent position of the region  $V$  changes to one finite element in relation to the crack tip (Fig. 1).

We denote as  $\{u\}_I$ ,  $\{R\}_I$  and  $\{u\}_{II}$ ,  $\{R\}_{II}$  vectors of displacements and node reactions of the subdomain  $V$  in positions "1" and "2", which are differ with the location of subdomain in relation to the crack front. Each of these vectors contains of  $3N$  components, representing values of displacements and node reactions in three directions respectively and has the form:

$$\{u\}_I^T = \{(u_1)_1 (u_2)_1 (u_3)_1 \dots (u_k)_n \dots (u_3)_{N-1} (u_1)_N (u_2)_N (u_3)_N\},$$

where the indices  $k=1, 2, 3$  represent the directions of displacement (or node reaction), and the indices  $n=1, 2, \dots, N$  are the numbers of nodes within each of the subdomain.

We allocate the axis  $z^{2'}$  of the global coordinate system of a finite element model along the surface of the crack (perpendicular to the front and in the assumed direction of crack propagation). Then, under the condition of a regular finite element mesh in the direction of  $z^{2'}$ , the definition formula for  $J^*$  in discrete models acquires the following form [1]:

$$J^* = \frac{1}{2\Delta z^{2'}} \left( \{u\}_{II}^T \{R\}_{II} - \{u\}_I^T \{R\}_I \right) - \frac{1}{2\Delta z^{2'}} \left( \{u\}_{II}^T - \{u\}_I^T \right) \left( \{R\}_I + \{R\}_{II} \right). \quad (3)$$

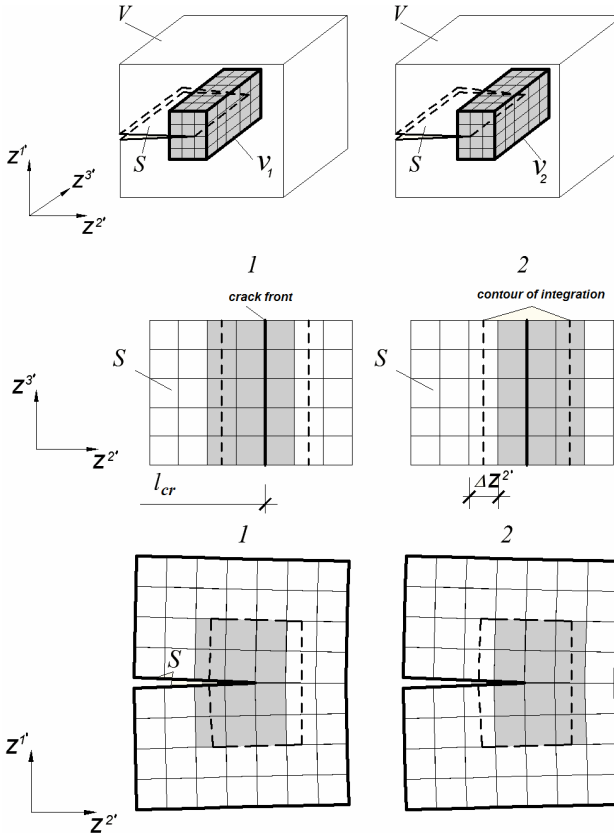


Fig. 1. Scheme of subdomain moving for calculation of parameter  $J^*$

After multiplying of the nodes reactions to the corresponding displacements and adding such components, formula (3) will look like:

$$J^* = \frac{1}{2\Delta z^{2'}} \left( \{u\}_I^T \{R\}_{II} - \{u\}_{II}^T \{R\}_I \right). \quad (4)$$

It is not difficult to prove that in the absence of volume forces, this formula is identical to the formula being obtained directly from the expression of the Cherepanov-Rice integral for its calculation by the reaction method [1].

Verification of the developed technique is carried out on the problem of stretching of the plate with a central crack (Fig. 2, a). The calculation was carried out both under the action of the surface load and taking into consideration of the volume forces that additionally applied to the plate (the forces of 2, 3, 4, 5 kg, directed along  $Z^1$  and  $Z^2$  in the nodes 1, 2, 3, 4,

Fig. 2,  $b$ ,  $q=1 \text{ kg/sm}$ , Young's module  $E=1 \text{ kg/sm}^2$ , Poisson ratio  $\nu=0.3$ ). The obtained results were compared with the values of the Griffiths parameter, which was calculated according to the method described in [8].

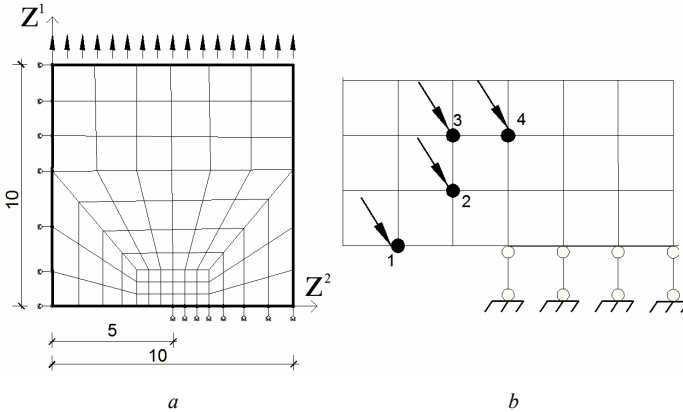


Fig. 2. Square plate with a central crack

The results of calculation, which presented in Table 1, indicate that the value of  $G$  and  $J^*$  differ by less than 1%.

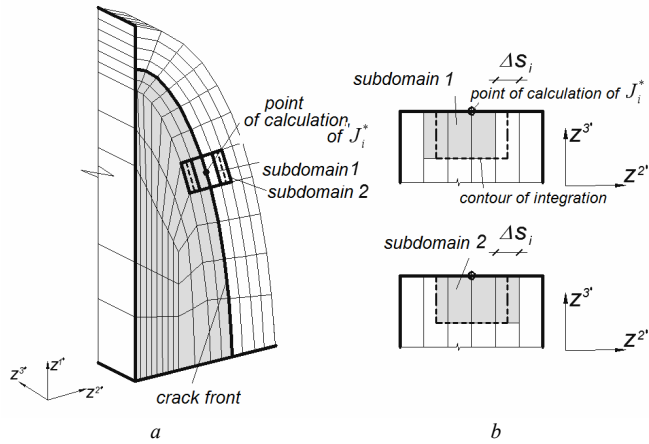
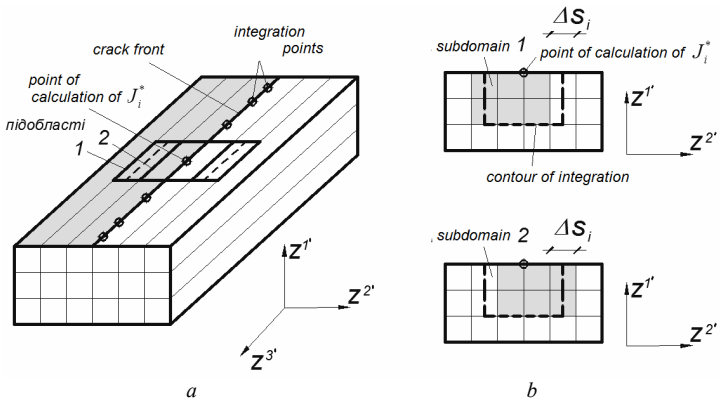
Table 1

Type of load	Fracture parameter		$\delta, \%$
	$G$	$J^*$	
Surface load	24.52	24.35	0.7
Volume load	261.2	260.05	0.4

**2. Implementation of the technique in the semi-analytical finite element method (SFEM).** When the numerical realization of the formula (4) made using of SFEM, the points of calculation of  $J^*$  in bodies with crosscut cracks are located in the centers of the lines of the crack front, which are lateral faces of two finite element adjacent to the front (Fig. 3,  $a$ ). Separate volumes of integration and their corresponding sub-domain determine for each such point (Fig. 3,  $a, b$ ). The formula for calculation of the integral for a separate point in the front acquires the following form:

$$J_i^* = \frac{1}{2\Delta s_i} \left( \{u\}_I^T \{R\}_{II} - \{u\}_{II}^T \{R\}_I \right). \quad (5)$$

In bodies with longitudinal cracks the points of calculation of  $J^*$  will coincide with the integration points located along the front of the crack (Fig. 4).

Fig. 3. Calculation of  $J^*$  in bodies with crosscut crack using of SFEMFig. 4. Calculation of  $J^*$  in bodies with longitudinal crack using of SFEM

Approbation of the developed technique in spatial bodies was carried out on the test problem of the definition of  $G$  in a prismatic body with a lateral incision of zero thickness under the action of force load (Fig. 5). The results of the calculation of  $J^*$  are almost coincide with values of  $G$  obtained in [8] and are well consistent with the results of the calculation of  $G(K)$  based on the values of CIF being calculated by the direct method [7] (Fig. 5).

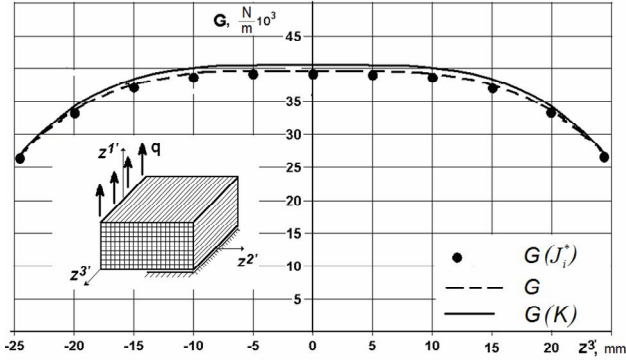


Fig. 5. Distribution of Griffiths parameter  $G$  along the front of lateral incision in a prismatic body

**3. Reliability of results under temperature load.** A further study of reliability was carried out for the case of temperature load. A test problem of deformation of a long thick-walled cylinder with a crack was considered at first (Fig. 6).

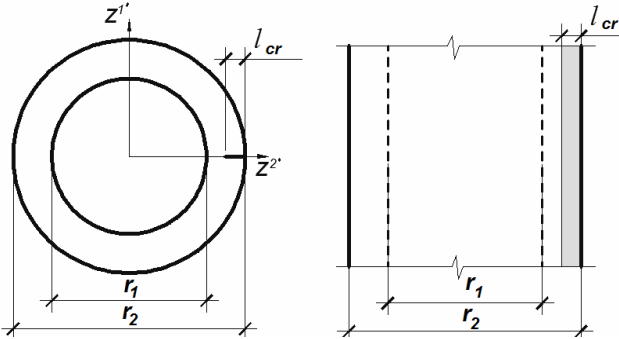


Fig. 6. Geometric scheme of a thick-walled cylinder with a crack

The material of cylinder is steel “38XH3MΦA”, Young's module  $E=210\text{ GPa}$ , Poisson ratio  $\nu=0.3$ , coefficient of linear expansion  $\alpha = 13.5 \cdot 10^{-6} \text{ deg}^{-1}$ . The radial distribution of temperature is described by the logarithmic law:

$$T = T_1 + (T_2 - T_1) \frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r/r_2)},$$

where  $T, r$  - temperature and radius of the current point;  $T_1, r_1, T_2, r_2$  - temperatures and radius of the inner and outer surfaces of the cylinder,  $T_1 = 100 \text{ deg}$ ,  $T_2 = 0$ ,  $r_1 = 2 \text{ m}$ ,  $r_2 = 3 \text{ m}$ . Crack length  $l_{cr} = 0,5 \text{ m}$ .

Discrete models with allowance for symmetry are designed for a half of cylinder (Fig. 7).

As in the previous test problem, the finite elements in the vicinity of the crack tip are the squares with side  $l_{FE}$  corresponding to the ratio  $l_{FE} / l_{cr} = 10$  (Fig. 7, a) and  $l_{FE} / l_{cr} = 20$  (Fig. 7, b).

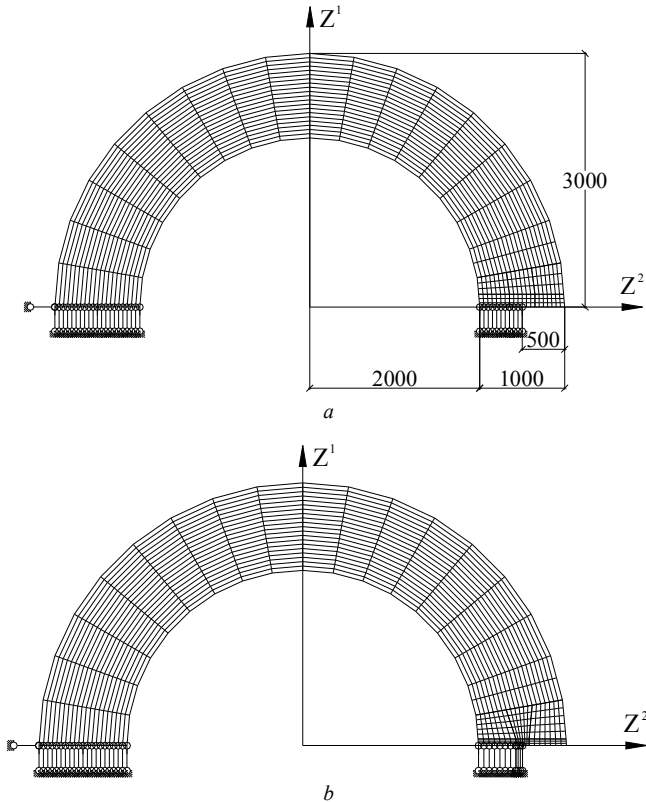


Fig. 7. Cylinder discrete models of finite elements of different sizes

The calculation results are presented in the form of CIF, calculated by direct method – on the basis of displacements, and by energy method – by the values of  $G$  and  $J^*$ .

The value of the CIF ( $K_I, MPa\sqrt{m}$ ), calculated on the basis of  $G$  by the method of compliance for a mesh with the  $FE$  size  $l_{FE} / l_{cr} = 20$  in the vicinity

of crack tip was taken as the reference. As can be seen, the results of the calculation of CIF by all three methods are almost the same (Table 2).

Table 2

$l_{FE} / l_{cr}$	Direct method		Method of reaction		Method of compliance $K_I(G)$
	$K_I(u)$	$\delta, \%$	$K_I(J^*)$	$\delta, \%$	
10	248	4.4	235.4	0.9	235.9
20	238.4	0.4	237.4	0.1	237.6

A test problem about rectangular plate with a crack which uniformly cooled down at  $\Delta T = 100$  deg was considered next. Boundary condition is tough pinching along the edges (Fig. 8, *a*). Physical and mechanical properties are similar to the previous test problem. Discrete models are designed for half of the plate with allowance for symmetry and shown in Fig. 8, *b* and Fig. 8, *c* at  $l_{FE} / l_{cr} = 10$  and  $l_{FE} / l_{cr} = 20$  respectively.

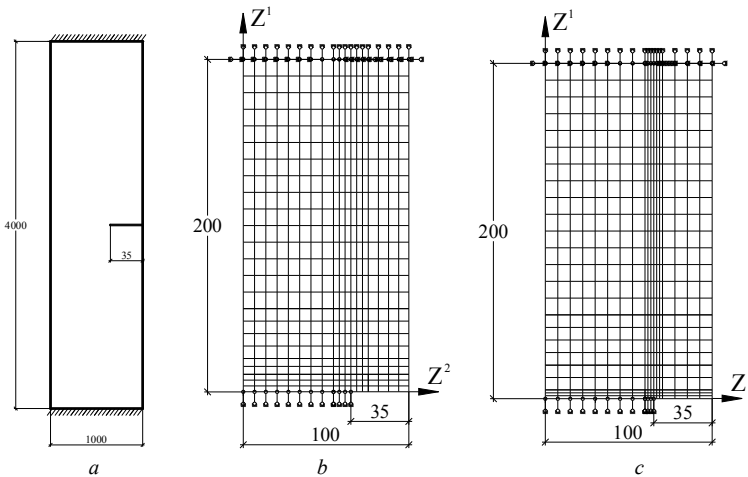


Fig. 8. Rectangular plate with a crack: design scheme (*a*), discrete models of finite elements of different sizes (*b,c*)

The results of the calculation show that, as in the previous problem, the method of compliance and the method of reactions give practically the same result (Table 3,  $K_I, MPa\sqrt{m}$ ). The difference of the results of the direct method is within 5%. The solution of this problem by analytical method and using the ANSYS is given in [6]. The CIF values in ANSYS were calculated by the direct method using the displacement in the node which is closest to the



crack tip and by the energy method using the value of the  $J$ -integral. The obtained results differ from those shown in Table 3 within 3%.

Table 3

$l_{FE} / l_{cr}$	Direct method		Method of reaction		Method of compliance
	$K_I(u)$	$\delta, \%$	$K_I(J^*)$	$\delta, \%$	$K_I(G)$
10	519.8	4.8	543.4	0.5	543.1
20	520.6	4.7	546.2	0	546.3

**Conclusions.** The solution of the test problems showed the reliability of the developed method for determining the parameter  $J^*$  in comparison with other methods for bodies with cracks under the action of the volumetric forces of various nature. The results are in good agreement with the data received by other authors in the named publications.

Thus, the approach based on the method of reaction to the calculation of the parameter  $J^*$  allows to estimate independently the cracking strength of bodies with cracks, which can justify the reliability of the results in comparison with other methods.

## REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Maksimyyuk Yu.V., Shkryl' A.A.* Solving linear and nonlinear three-dimensional problems of fracture mechanics by a semi-analytic finite element method. Part 2. A procedure for computing the invariant  $J$ -integral in FEM discrete models – Strength of Materials. – 2011. – 43. – P. 17–32. <https://doi.org/10.1007/s11223-011-9278-9>
2. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Sakharov A.S., Shkryl' A.A.* The method to evaluate the invariant  $J$ -integral in finite element models of prismatic bodies – International Applied Mechanics. – 2008. – V.44. – Issue 12. – PP 1378–1388. <https://doi.org/10.1007/s10778-009-0154-2>
3. *Broyek D.* The foundation of fracture mechanics: Transl. form Engl. – Moscow: Vyssh. shk., 1980. - 368 p. [In Russian]
4. *Bazhenov, V.A., Sakharov, A.S., Maksimyyuk, Y.V., Shkryl' A.A.* A Modified Method for Evaluating the Invariant  $J$ -Integral in Finite-Element Models of Prismatic Bodies – International Applied Mechanics. – 2016. – V.52. – Issue 2. – PP. 140-146. <https://doi.org/10.1007/s10778-016-0741-y>
5. *Morozov Ye.M., Nikishkov G.P.* Finite element method in fracture mechanic problems – Moscow: "Nauka", 2010. - 256 p. [In Russian]
6. *Morozov Ye.M.* ANSYS for Engineer's using. Fracture mechanics [Morozov Ye.M., Muzymnek A.Yu., Shadskiy A.S.] – Moscow : LENAND, 2008. – 453 p. [In Russian]
7. *Piskunov S.O., Shkryl' O.O., Mitsyuk S.V.* The direct method for estimation of stress intensity factor for prismatic and nonclosed rotation bodies under static loading condition – Опір матеріалів і теорія споруд. – 2016. – No. 97. – P. 3-14. [In Ukrainian]
8. *Shkryl' O.O.* Estimation of  $G$  basing of calculation of invariant volume integrals using of reaction method – Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017 – No. 98. – P.31-42. [In Ukrainian]
9. *Anderson T.L.* Fracture mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition.-CRC Press, 2005. - 640p.

*Баженов В.А., Пискунов С.О., Шкріль О.О.*

### **МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРА $J^*$ В ДИСКРЕТНИХ МОДЕЛЯХ МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

На основі методу реакцій розроблена методика обчислення параметру  $J^*$  методом зміщення підобластей в дискретних моделях методу скінчених елементів. Проведено розв'язання тестових задач. Отримані результати підтверджують ефективність методики.

**Ключові слова:** механіка руйнування, напіваналітичний метод скінчених елементів, параметр  $J^*$ , метод реакцій.

*Bazhenov V.A., Piskunov S.O., Shkril' A.A.*

### **METHODOLOGY OF DETERMINING OF PARAMETER $J^*$ IN DISCRETE MODELS OF FINITE ELEMENTS METHOD**

Fracture mechanics' parameters are used when the stress-strain state in the vicinity of the crack tip being evaluated. Energy methods have been most developed in determining of the fracture mechanics parameters to date. A method of reactions has been developed in earlier works of authors that makes it possible to determine the  $J$ -integral in discrete models of the finite element method. However, the use of the  $J$ -integral is possible in the absence of voluminous forces. The case of voluminous forces caused by the action of temperature loads is the exception of it.  $J^*$  is used as the fracture parameter in this case. A new method for calculating of the parameter  $J^*$  is developed in this paper, based on the reaction method. The implementation of this method involves the displacement of the subregions of integration into one finite element. Approbation of the developed approach was carried out on the test problem of deformation of a rectangular plate with a central crack. The obtained results showed that under the action of both surface and voluminous forces on the plate, the values of the parameter  $J^*$  coincide with the standard solution. Further, the developed approach was implemented for spatial problems, using discrete models of a semi-analytic finite element method. The determination of  $J^*$  is performed in this case at separate points of the crack front for each of which separate volumes of integration and corresponding subregions are stand out. Approbation of the technique in the spatial bodies was carried out on the test problem of the bending of a prismatic body with a lateral notch. Then the developed method was tested on two test problems in the presence of volume forces caused by the action of temperature loads. The results coincided with the values of  $J^*$  obtained by other authors with the help of the finite element software ANSYS. Thus, the method of determining of the parameter  $J^*$ , developed on the basis of the reaction method, makes it possible to effectively evaluate the stress-strain state in bodies with cracks under the action of surface and voluminous forces.

**Keywords:** fracture mechanic, semi-analytical finite element method,  $J^*$  paramet, reaction method.

*Баженов В.А., Пискунов С.О., Шкріль А.А.*

### **МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРА $J^*$ В ДИСКРЕТНЫХ МОДЕЛЯХ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

На основе метода реакций разработана методика определения параметра  $J^*$  методом смещения подобластей в дискретных моделях метода конечных элементов. Проведено решение тестовых задач. Полученные результаты подтверждают эффективность методики.

**Ключевые слова:** механика разрушения, полуаналитический метод конечных элементов, параметр  $J^*$ , метод реакций.

*Баженов В.А., Пискунов С.О., Шкрыль А.А. Методика визначення параметра  $J^*$  в дискретних моделях метода скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99. – С. 33 – 44.*

*На основі методу реакцій розроблена методика визначення параметра  $J^*$  методом зміщення підобластей в дискретних моделях методу скінченних елементів (МСЕ). Розв'язані тестові задачі. Отримані результати підтверджують ефективність методики.*

*Л. 8. Бібліогр. 9 назв.*

*Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Shkryl' A.A. Methodology of determining of parameter  $J^*$  in discrete models of finite element method // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue 99. – P. 33 – 44.*

*Based on the method of reactions, a technique for determining of the parameter  $J^*$  by the subdomain displacement method in discrete finite element method (FEM) models has been developed. Test problems are solved. The obtained results confirm the effectiveness of the technique.*

*Баженов В.А., Пискунов С.О., Шкрыль А.А. Методика определения параметра  $J^*$  в дискретных моделях метода конечных элементов // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вип. 99. – С. 33 – 44.*

*На основе метода реакций разработана методика определения параметра  $J^*$  методом смещения подобластей в дискретных моделях метода конечных элементов (МКЭ). Решены тестовые задачи. Полученные результаты подтверждают эффективность методики.*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри будівельної механіки КНУБА Баженов Віктор Андрійович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки, Баженов Віктор Андрійович.

**Робочий тел.:** +38(044) 245-55-55;

**Мобільний тел.:** +38(050) 351-66-21.

**E-mail:** [vikabazh@ukr.net](mailto:vikabazh@ukr.net)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** професор, доктор технічних наук, професор кафедри будівельної механіки КНУБА Пискунов Сергій Олегович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки, Пискунов Сергій Олегович.

**Адреса домашня:** 03087, Україна, м. Київ, вул. Іскрівська б.3, кв.10

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-55;

**Мобільний тел.:** +38(050) 962-66-14.

**E-mail:** [s\\_piskunov@ua.fm](mailto:s_piskunov@ua.fm)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доцент, кандидат технічних наук, професор кафедри будівельної механіки КНУБА Шкриль Олексій Олександрович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки, Шкрилю Олексію Олександровичу .

**Адреса домашня:** 08132, Україна, м. Вишневе, вул. Г. Сковороди 10, кв. 24

**Робочий тел.:** +38(044) 245-55-55;

**Мобільний тел.:** +38(050) 307-61-49.

**E-mail:** [alexniism@ukr.net](mailto:alexniism@ukr.net)

УДК 539.3

## МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ КОНСТРУКЦІЇ ДОРОЖНЬОГО ОДЯГУ ПІД ДІЄЮ ТРАНСПОРТНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

**В.В. Гайдайчук<sup>1</sup>,**  
д-р техн. наук,

**В.В. Мозговий<sup>2</sup>,**  
д-р техн. наук

**Ю.О. Засць<sup>2</sup>,**  
канд. техн. наук,

**Л.В. Шевчук<sup>2</sup>,**  
канд. техн. наук,

<sup>1</sup>*Київський національний університет будівництва і архітектури,  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

<sup>2</sup>*Національний транспортний університет,  
вул. Омеляновича-Павленка 1, м. Київ. 01010*

Поставлена задача про визначення напружено-деформованого стану шаруватого напівпростору під дією транспортних навантажень. Побудована скінченно-елементна модель пружної деформації масиву, виконаний комп'ютерний аналіз системи. Показано, що найнебезпечніші для покриття напруження розтягу локалізуються у нижній зоні шарів із монолітних матеріалів.

**Ключові слова:** автомобільна дорога, асфальтобетонне покриття, транспортні навантаження, поле напружень, напружено-деформований стан.

**1. Вступ.** Розтріскування асфальтобетонного покриття автомобільних доріг, викликане низькими температурами і дією транспортних навантажень, є однією з основних причин їх передчасного руйнування. У процесі експлуатації дороги наявність тріщини призводить до несної здатності монолітних шарів, а також і до проникнення через неї вологи в конструкцію дорожнього одягу і ґрунтове полотно. Моделювання напружено-деформованого стану дозволить оцінити вірогідність утворення тріщин, сприяти їх прогнозуванню та зниженню рівня негативного впливу на міцність і довговічність системи.

Зазначені ефекти давно привертали увагу вчених і фахівців-дорожників, тому явище утворення тріщин стало предметом їхніх багаторічних досліджень. Так, починаючи ще з 50-60-х років минулого століття, тривають як теоретичні, так і експериментальні роботи, спрямовані на вивчення проблем розтріскування асфальтобетонного покриття автомобільних доріг. Тим не менш, саме фізичне явище, при виникненні якого має місце розтріскування дорожнього асфальтобетонного покриття, до сих пір не вивчено повністю. Як

зазначено в роботі [1], основними причинами, що викликають утворення тріщин, є низькотемпературний вплив і деформаційні ефекти, спричинені дією статичних і динамічних транспортних навантажень. Чисто механічні погляди на процес виникнення тріщин не дали переконливого пояснення багатьом практично важливим особливостям поведінки конструкції дорожнього одягу під час експлуатації.

Наприклад, в умовах впливу низьких температур виникають наступні питання:

1. Чому на початковому етапі формування низькотемпературні тріщини орієнтовані, як правило, в поперечному напрямку дороги?

2. Чому кількість низькотемпературних тріщин на розглядуваному покритті збільшується з року в рік?

3. Чим можна пояснити приблизно рівні відстані між ними?

4. Як пов'язані їхні кількісні характеристики з показниками погоднокліматичних умов місцевості?

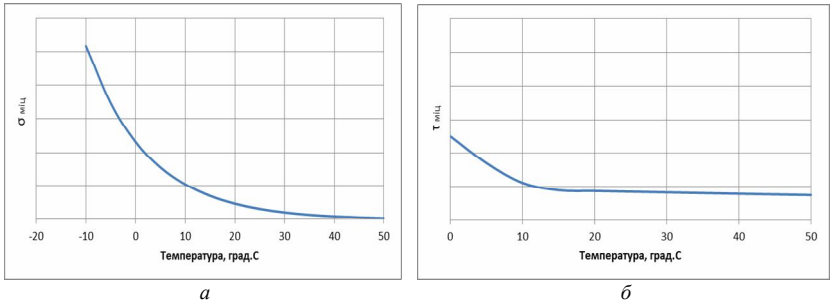
5. Чи можна знайти такий матеріал для дорожнього покриття, при використанні якого не з'являються низькотемпературні тріщини або їхня кількість буде істотно меншою в порівнянні з традиційними видами асфальтобетону?

6. Які конструктивні і технологічні заходи можна вжити, щоб повністю або частково запобігти появі низькотемпературних тріщин? та ін.?

Відповіді на деякі з цих питань подані в роботах [2, 3].

Не менш складним є також питання аналізу утворення тріщин на асфальтобетонному покритті під дією транспортних навантажень. Ця складність зумовлена тим, що асфальтобетони проявляють властивості в'язкопружних матеріалів, тому аналіз їх деформування повинен здійснюватися з урахуванням досить складних реологічних процесів релаксації та повзучості, а навантаження від транспортних засобів викликають в багатошаровому масиві конструкції дороги тривимірний напружено-деформований стан з суттєвими градієнтами стискаючих, розтягуючих та зсувних напружень. Необхідно також врахувати, що асфальтобетон по-різному чинить опір цим видам напружень і особливо їх комбінації. Так, якщо його міцність при стисненні порівняно велика, то при розтягуванні та зсуві вона є значно меншою і до того ж суттєво залежить від температури. На рис. 1 представлені, отримані експериментально [4], графіки нормальних напружень розриву  $\sigma_{міц}$  та зсувних напружень  $\tau_{міц}$  асфальтобетону в залежності від температури.

Не менш актуальним є вивчення питання міцності асфальтобетонних шарів під дією дотичних напружень, оскільки в реальних умовах вони досить слабо чинять опір зсуву. Причому здатності чинити опір цим діям сприяють додаткові об'ємні стискаючі напруження в розглянутій зоні і зменшують напруження розтягу.

Рис. 1. Значення граничних напружень розтягу  $\sigma_{\text{миц}}$  (а)і зсувних напружень  $\tau_{\text{миц}}$  (б) для асфальтобетонних матеріалів

З огляду на ці обставини, можна спробувати встановити деякі найбільш загальні особливості і тенденції настання граничних напружено-деформованих станів конструкцій дорожнього одягу, як шаруватих масивів дороги, методами тривимірної теорії пружності, визначаючи зони з найбільшими розтягуючими та зсувними напруженнями і аналізуючи умови, при яких мають місце їхні найбільш несприятливі комбінації.

**2. Постановка задачі.** Сформулюємо задачу про визначення напружено-деформованого стану конструкції дороги під дією транспортних навантажень. Дослідимо характер розподілу зон розтягуючих і зсувних напружень під колесами великовантажного автомобіля (рис. 2) з метою аналізу впливу накладення полів напружень в залежності від міжосьових відстаней « $a$ » і « $b$ » і відстаней між колесами « $c$ » і « $d$ ». Будемо вважати, що відповідно до загальноприйнятої методики [1] і результатів натурних спостережень пляма від контакту колеса з поверхнею дорожнього покриття (рис. 3) являє собою прямокутник (рис. 4), ширина « $e$ » якого визначається конструкцією колеса і не змінюється зі зміною навантаження на колесо, а висота « $f$ » залежить від цього навантаження так, що рівнодіюча  $P$  контактного тиску « $p$ » дорівнює силі, що діє на колесо, тобто

$$P = p \cdot e \cdot f. \quad (1)$$

Тут  $p$  – тиск в пневматиці.

Прийmemo, що  $P$  і  $p$  відомі, тоді висота « $f$ » плями визначається рівністю

$$f = P / (p \cdot e). \quad (2)$$

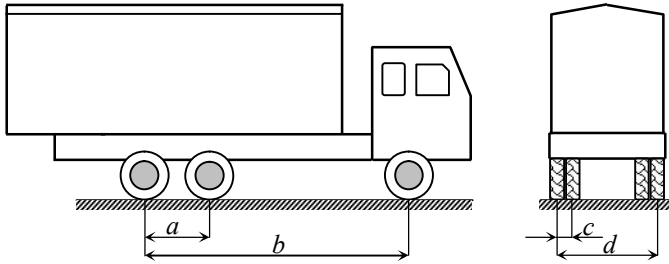


Рис. 2. Геометрична схема розташування коліс трьохвісного автомобіля

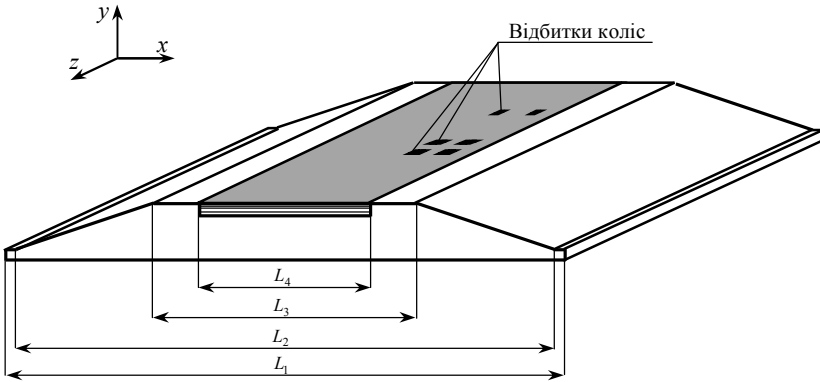


Рис. 3. Конструктивна схема дорожнього масиву

Представлена задача є тривимірною. Для її розв'язання необхідно площинами  $x = const$ ,  $y = const$ ,  $z = const$  виділити із загального неоднорідного шаруватого масиву прямокутний паралелепіпед і, задавши відповідні граничні умови на відповідних граничних площинах, розв'язати відповідні рівняння теорії пружності чисельним методом.

При побудові цих рівнянь врахуємо, що швидкості поширення хвиль пружних деформацій в масиві, що розглядається, (складові сотні метрів в секунду) набагато перевищують швидкості руху автомобілів. Тому навантаження від сил тяжіння рухомого транспортного засобу можна вважати квазістатичним і задачу формулювати в статичній постановці.

Вважаємо, що конструкція дороги складається з чотирьох шарів, що лежать на ґрунтовій основі (рис. 3). Надамо їм номери 1-4 в порядку слідування зверху вниз, номер 5 присвоїмо ґрунтовій основі. Тоді в межах кожного фрагменту 1-5 дороги задовольняються рівняння пружної рівноваги [4]

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{grad div} \vec{u} = 0. \quad (3)$$



Тут  $\lambda$  і  $\mu$  – параметри Ляме. Вони виражаються через модуль пружності  $E$  і коефіцієнт Пуассона за допомогою співвідношень

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

На вільних площинах шару 1 і ґрунтовому масиві задані умови рівності нулю нормальних і дотичних напружень

$$\sigma_y = 0, \quad \tau_{yx} = \tau_{yz} = 0. \quad (4)$$

У межах плями контактної взаємодії напруження  $\sigma_y$  дорівнює тиску  $p$  в пневматичі, тому

$$\sigma_y = -p. \quad (5)$$

На площинах зчленування суміжних шарів, а також четвертого шару з ґрунтовою основою задавалися умови неперервності переміщень

$$u_{i-1} = u_i, \quad v_{i-1} = v_i, \quad w_{i-1} = w_i \quad (i = 2, 3, \dots, 5). \quad (6)$$

Для розв'язання задачі був використаний метод скінченних елементів. При цьому виділений для розрахунків шаруватий масив розбивався на тривимірні скінченні елементи (рис. 5) і система диференціальних рівнянь замінювалася системою алгебраїчних скінченно-елементних рівнянь

$$[K_u]\{u\} = \{q\}, \quad (7)$$

сформованих з урахуванням граничних рівнянь (4) – (6). Тут  $[K_u]$  – матриця жорсткості для скінченно-елементної моделі всього пружного масиву,  $\{u\}$  – вектор вузлових переміщень,  $\{q\}$  – вектор навантаження.

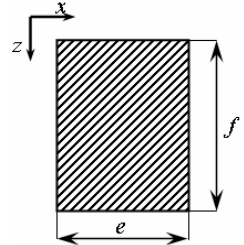


Рис. 4. Схема плями контакту між колісним пневматиком і поверхнею покриття

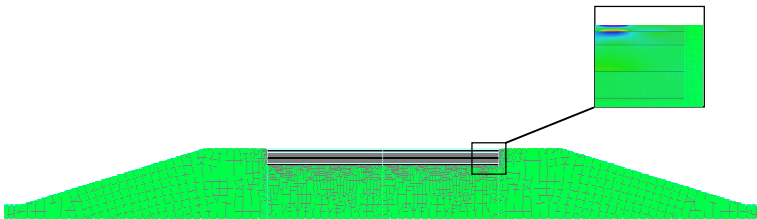


Рис. 5. Скінченно-елементна модель перерізу дорожнього масиву

В результаті розв'язання цієї системи обчислювалися деформації у всіх вузлах скінченно-елементної моделі і будувалися поля напружень. Обробка результатів обчислень проводилася із застосуванням спеціально розробленого постпроцесора, що дозволяє кожному знайденому

значенню шуканої функції ставити у відповідність кольоровий мазок на виділеному полі і за допомогою кольорової шкали ідентифікувати їх величини.

**3. Результати чисельного аналізу.** Для аналізу обрано чотиришарова конструкція дорожнього покриття з габаритними розмірами  $L_1 = 24,5$  м,  $L_2 = 23,5$  м,  $L_3 = 11,5$  м,  $L_4 = 7,5$  м. Матеріали шарів, їх товщини і механічні властивості обрані наступними: шар 1 – асфальтобетон дрібнозернистий,  $h = 0,05$  м,  $E = 5 \cdot 10^9$  Па,  $\nu = 0,2$ ; шар 2 – асфальтобетон пористий крупнозернистий,  $h = 0,1$  м,  $E = 1,4 \cdot 10^9$  Па,  $\nu = 0,25$ ; шар 3 – щебінь,  $h = 0,2$  м,  $E = 0,4 \cdot 10^9$  Па,  $\nu = 0,3$ ; шар 4 – пісок,  $h = 0,2$  м,  $E = 0,1 \cdot 10^9$  Па,  $\nu = 0,3$ ; ґрунт –  $h = 2,5$  м,  $E = 0,1 \cdot 10^9$  Па,  $\nu = 0,35$ .

Для розрахунку виділений масив дороги довжиною  $l = 1,8$  м. Скінченно-елементна схема перетину конструкції дороги представлена на рис. 5. Загальна кількість скінченних елементів для неї склало 331104, число вузлів – 236475, число шуканих невідомих – 687633.

В роботі [1] методами експериментального і комп'ютерного моделювання встановлено, що взаємний вплив полів напружень від коліс, які закріплені на двох найближчих сусідніх осях автомобіля (рис. 2), не перевищує 10%. Тому на початковому етапі вважалося, що на верхній шар діє вертикальне навантаження від одного колеса, яке розташоване на одній осі, і дія навантажень від інших коліс не враховувалась. У зв'язку з тим, що задача розв'язувалась в тривимірній постановці, а шари покриття мають малу товщину, верхній шар був апроксимований всього лише двома елементами по вертикалі.

З урахуванням того, що розглянута система має симетрію відносно площини  $z = 0$ , яка проходить через осьову лінію коліс, для розрахунку виділений масив дороги, обмежений площинами  $z = 0$  і  $z = 1,8$  м. У математичній моделі на цих площинах задавалися граничні умови симетрії.

На рис. 6 у кольоровому зображенні показано поля розподілу вертикальних переміщень в перерізі дорожнього масиву. Справа подана шкала значень кольорової палітри, яка відповідає значенням переміщень  $u_z(x, y)$ . Як видно, максимальне переміщення склало  $3 \cdot 10^{-4}$  м. При цьому максимальні значення функцій напружень локалізуються у прилеглий до колеса зоні. В зв'язку з цим, тут доречно звернути увагу на висновки, які зроблені американськими вченими в роботі [1]. Вони відзначили, що оскільки, конструкція дороги складається з тонких шарів покриття, доводиться їх апроксимувати скінченними малих розмірів і для досягнення необхідної точності приходиться будувати скінченно-

елементні моделі з великим числом ступенів вільності. В результаті розв'язання, сформульованих таким чином систем рівнянь, вимагає великого обсягу розрахункового часу на сучасних швидкодіючих комп'ютерах. Тому для якісного аналізу полів напружень у фрагментах конструкції і встановлення найбільш загальних закономірностей їх розподілу в роботі [1] запропоновано розв'язати двовимірну задачу в площині  $Oxy$ , яка проходить через вісь автомобіля перпендикулярно напрямку  $Oz$  дороги.

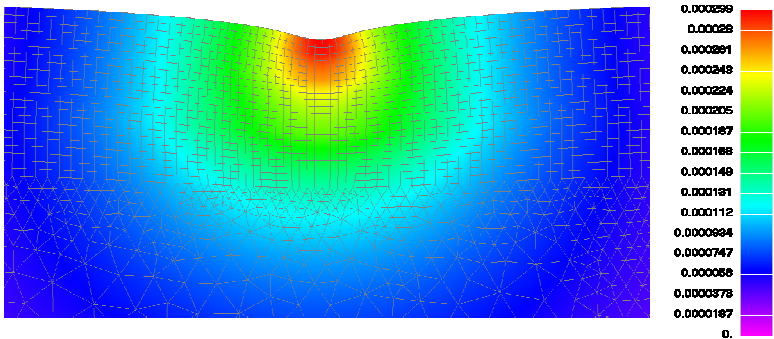


Рис. 6. Поле переміщень в шаруватому масиві під дією навантаження від одного колеса

У нашому випадку відстань між серединними площинами коліс  $c = 0,365 \text{ м}$ , центр крайнього колеса віддалений від краю покриття дороги на величину  $0,5 \text{ м}$ , ширина контактної плями  $e = 0,2 \text{ м}$ , інтенсивність рівномірно розподіленого тиску колеса на поверхню дороги дорівнює тиску в пневматичі  $p = 0,8 \text{ МПа}$ .

Завдяки моделюванню задачі в двовимірній постановці, вдалося істотно згустити скінченно-елементну сітку в площині  $XoY$  і апроксимувати верхній шар десятками рядами скінченних елементів у висоту. При такій апроксимації число скінченних елементів у всій моделі виявилось рівним 195028, число вузлів – 294777, число шуканих переміщень – 687600.

На рис. 7 показано перетин конструкції дороги під колесами в деформованому стані. Максимальне переміщення  $u_y$  під колесами склало  $3,23 \cdot 10^{-3} \text{ м}$ .

Поле розподілу нормальних напружень  $\sigma_y$  на горизонтальних площадках пружного масиву представлено на рис. 8. Вони всюди від'ємні, тобто є стискаючими і швидко зменшуються по вертикалі.

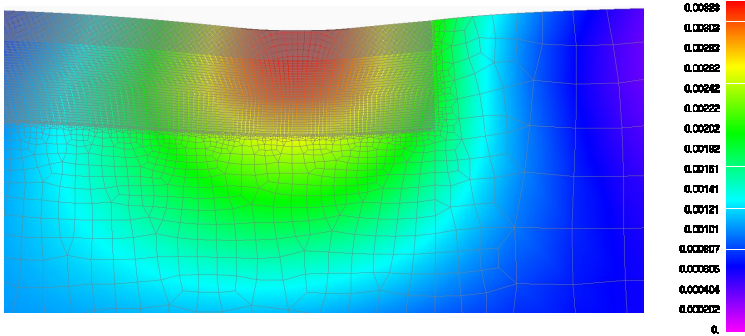


Рис. 7. Поле переміщень в шаруватому масиві під дією навантаження від двох коліс

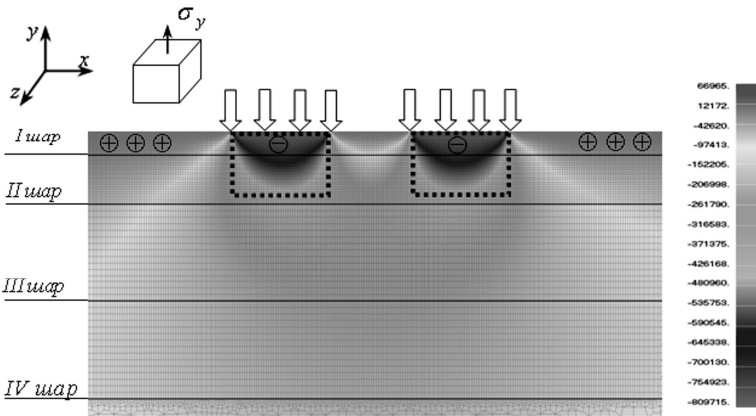


Рис. 8. Поле напружень  $\sigma_y$  у перерізі дорожнього покриття

Більш істотний інтерес представляє характер розподілу в перерізі функції нормальних напружень  $\sigma_x$ , оскільки вони є знакозмінними. На рис. 9 ділянки максимальних по модулю від'ємних і додатних напружень виділені окремо. Вони мають місце у верхній і нижній зонах першого і другого шарів асфальтобетонного покриття, причому стискаючі напруження істотно перевищують значення напружень розтягу. Такий характер розподілу напружень  $\sigma_x$  можна пояснити тим, що значення модулів пружності  $E_1$ ,  $E_2$  двох верхніх шарів набагато більші модулів пружності нижніх шарів, тому два верхніх шару можна вважати плитою, яка лежить на пружній основі, утворену двома шарами, які нижче лежать, і ґрунтовим масивом, а конструкцію покриття для обраного навантаження

можна моделювати як згин плити на пружній основі. У цьому випадку верхні елементи шару 1 стиснуті, а нижні елементи нижнього шару 2 – розтягнуті. Природно очікувати, що утворення тріщин і руйнування цієї конструкції має починатися з нижніх елементів другого шару, якщо причиною руйнування є розтягнення.

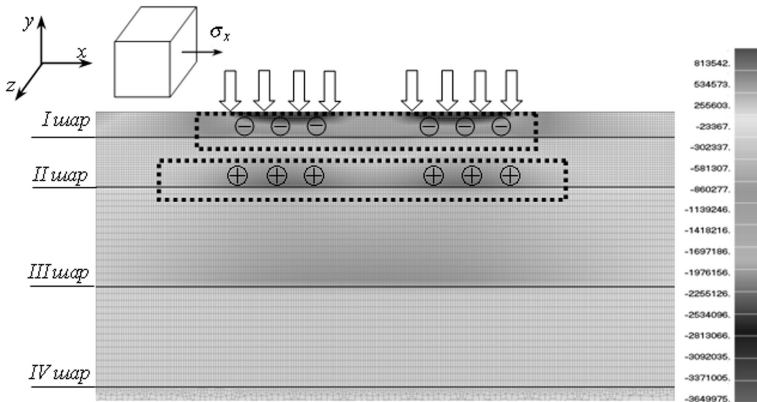


Рис. 9. Поле напружень  $\sigma_x$  у перерізі дорожнього покриття

Звернемося тепер до поля розподілу дотичних напружень  $\tau_{xy}$ , що діють на площадках  $x = const$  в напрямку осі  $Oy$  (рис. 10). Зони їх максимальних величин виділені в прямокутники і їх числові значення подані праворуч на кольоровій шкалі. Як і вище, кожен колірний відтінок цієї палітри відповідає певному значенню даної величині.

Співставляючи результати обчислень на рис. 9 і 10, випишемо максимальні значення цих величин:  $\sigma_x^{\max} = 0,813 \text{ МПа}$ ,  $\tau_x^{\max} = 0,512 \text{ МПа}$ .

Необхідно підкреслити, що максимальні значення зсувних напружень  $\tau_x^{\max}$  реалізуються в зонах, де нормальні напруження  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$  є стискаючими, тому в ній елементи покриття можуть чинити опір зсувним навантаженням. Однак для встановлення конкретного рівня небезпеки тих і інших напружень необхідно на основі діаграм, представлених на рис. 1, досліджувати окремо вплив кожного з цих видів напружень.

Однією з причин прогресуючого руйнування дорожнього покриття є порушення зв'язків між його шарами. Для аналізу впливу розшарування на поля напружень в його конструкції прийемо, що на деякій ділянці дороги сталося відшарування першого шару від другого і шари можуть вільно ковзати відносно один одного. При цьому в напрямку вертикальної

осі між ними реалізуються нормальні стискаючі напруження і контакт між ними зберігається.

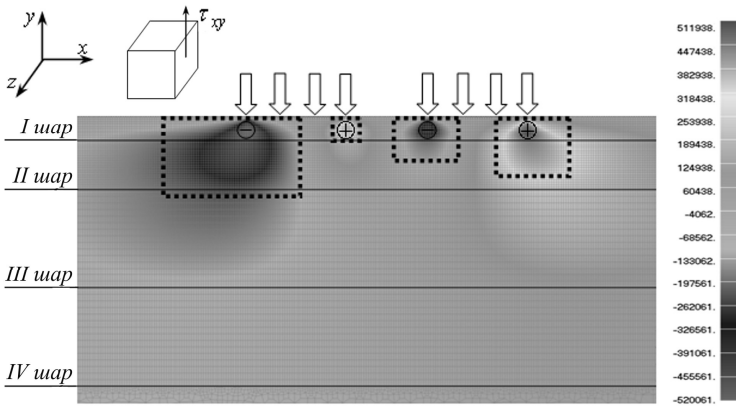


Рис. 10. Поле розподілу дотичних напружень  $\tau_{xy}$

Для такої постановки задачі виконано комп'ютерне моделювання напружено-деформованого стану покриття транспортного навантаження. Вважалось, що розшарування одягу сталося на ділянці, яка розташована на відстані на 2,34 м зліва і праворуч 0,54 м від центру колісної пари.

Розрахунки показали, що конструкція в цьому випадку стала більш піддатливою і її максимальний прогин склав  $u_x^{\max} = 3,51 \cdot 10^{-3}$  м. Відбулася також деяка перебудова полів напружень.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Litton R.L., Tsai F.L., Lee S.I., Luo R., Hu S., Zhou F.* «Models for Predicting Reflection Cracking of Hot-Mix Asphalt Overlays» Research Report 669, Texas Transportation Institute, Texas A&M University, College Station, Texas, 2010. P.61.
2. *Radovsky B.* Ways to reduce low-temperature cracking of asphalt pavements / B. Radovsky, V. Mozgovej // 4-th Eurobitum Symposium. Summaries and papers. Madrid, 4-9 Oct. 1989. Vol. 1. – P. 571-575.
3. *Мозговой В.В.* Повышение гидроизоляционной способности асфальтобетонного покрытия / В.В. Мозговой // Проблемы механики и строительства транспортных сооружений: Труды II Международной научно-практической конференции. - Алматы. – 2015. – С. 54-60.
4. *Страгис В.И.* Зависимость параметров сдвига асфальтобетона от температуры / В.И. Страгис, С.Ю. Рокас // Санитарная техника. Дороги. Гидротехническое строительство. Инженерная геодезия. Основания и фундаменты. Материалы Республиканской XIX научно-технической конференции. – Каунас. – 1969. – С. 51-54.
5. *Гуляев В.И.* Дослідження термонапруженого стану конструкцій дорожнього одягу / В.И. Гуляев, В.В. Гайдайчук, В.В. Мозговий, Ю.О. Засць, Л.В. Шевчук // Промислове будівництво та інженерні споруди. – 2017. – №1. – С. 6-12.

6. *Гайдайчук В.В.* Чисельне моделювання термонапруженого стану шаруватого покриття автомобільної дороги / В.В. Гайдайчук, В.В. Мозговий, Ю.О. Заець, Л.В. Шевчук // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 98 – С. 56-71.

## REFERENCES

1. *Litton R.L., Tsai F.L., Lee S.I., Luo R., Hu S., Zhou F.* «Models for Predicting Reflection Cracking of Hot-Mix Asphalt Overlays» Research Report 669, Texas Transportation Institute, Texas A&M University, College Station, Texas, 2010. P.61.
2. *Radovsky B., Mozgovoy V.* Ways to reduce low-temperature cracking of asphalt pavements // 4-th Eurobitum Symposium. Summaries and papers. Madrid, 4-9 Oct. 1989. Vol. 1. – P. 571-575.
3. *Mozgoviy V.V.* Povyshenie gidroizolyatsionnoy sposobnosti asfaltobetonnogo pokrytiya Tekst dlya perekladu (Waterproofing ability increase of asphalt-concrete pavement) // Problems of mechanics and construction of transport structures: Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference. Almaty. 2015. – P. 54-60.
4. *Strahys V.Y., Rokas S.Ju.* Zavisimost parametrov sdviga asfaltobetona ot temperatury (Dependence of asphalt-concrete displacement parameters on temperature) // Sanitary engineering. Roads. Hydrotechnical construction. The engineering geodesy. Bases and foundations. Materials of the Republican XIX scientific and technical conference. Kaunas – 1969. – P. 51-54.
5. *Gulyayev, V. I., Gaydaychuk V.V., Mozgoviy V.V., Zaets Yu. A., Shevchuk L.V.* Doslidzhennia termonapruzheno ho stanu konstrukt sii dorozhnogo odiahu (Analysis of thermo-stressed state of the road coating structures) // Industrial building and engineering structures. – 2017. – №1. – P. 6-12.
6. *Gaydaychuk V.V., Mozgoviy V.V., Zaets Yu. A., Shevchuk L.V.* Chyselne modeliuvannia termonapruzheno ho stanu sharuvato ho pokryt tia avtomobilnoi dorohy (Numerical simulation of thermo-stressed states of layered coating of automobile road) // Strength of Materials and Theory of structures. – 2017. – Vol. 98 – P. 56-71.

*Gaidachuk V.V., Mozgoviy V. V., Zaiets Yu. O., Shevchuk L.V.*

#### **SIMULATION OF STRESS-STRAIN STATES OF ROAD STRUCTURES UNDER ACTION OF TRANSPORT LOADS**

Currently, the intensity of the vehicular traffic enlarged essentially and the share of heavy-duty transport facilities with increased numbers of axles and boosted pressure in pneumatics rose noticeably. Therefore, the questions of investigation of the parameter and character of loads produced by modern transport facilities, acting on the pavement coating, assume great significance. In this connection, the necessity to elaborate, leaning upon the designing rules and results of full-size inspections, the classification of computational schemes of the road pavement structures functioning arose. For this reason, the mathematic models and computational methods, taking into account the modern characteristics of transport loads and thermo-mechanical properties of the road materials, should be elaborated with the aim to bring about the practical measures for upgrading of the pavement coating strength.

The problem on analysis of stress-strain states of a layered road massif under action of transport loads is formulated. The finite element model of the elastic massif equilibrium is constructed, the computer analysis of the system is performed. It is demonstrated that the most dangerous tensile stresses are localized in the lower zones of the second layer, while the maximal values of the shear stresses take place in the first layer in the vicinity of the external load application. The question of crack generation and layer destruction are discussed.

**Keywords:** automobile road, asphalt-concrete coating, transport loads, stress fields, stress-strain state.

*Гайдайчук В.В., Мозговой В.В., Заец Ю.А., Шевчук Л.В.*

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ  
КОНСТРУКЦИИ ДОРОГИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗОК**

Поставлена задача об определении напряжено-деформированного состояния слоистого дорожного массива под действием транспортных нагрузок. Построена конечно-элементная модель упругого равновесия массива, выполнен компьютерный анализ системы. Показано, что наиболее опасные для покрытия напряжения растяжения локализируются в нижних зонах второго слоя, в то время как максимальные значения напряжений сдвига имеют место в первом слое в окрестности приложения вертикальных сил. Обсуждаются вопросы трещинообразования и разрушения слоев.

**Ключевые слова:** автомобильная дорога, асфальтобетонное покрытие, транспортные нагрузки, поле напряжений, напряжено-деформированное состояние.

УДК 539.3

*Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Заєць Ю.О., Шевчук Л.В.*

**Моделювання  
напружено-деформованого стану конструкції дорожнього одягу під дією  
транспортних навантажень // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99.  
– С. 45 – 57.**

*Поставлена задача про визначення напружено-деформованого стану шаруватого напівпростору під дією транспортних навантажень.*

Іл. 10. Бібліогр. 6 назв.

*Gaidaichuk V.V., Mozgoviy V.V., Zaiets Yu.O., Shevchuk L.V. Simulation of stress-strain states of road structures under action of transport loads // Strength of Materials and Theory of structures. – 2017. – Issue 99. – P. 45 – 57.*

*The problem on analysis of stress-strain states of a layered road massif under action of transport loads is formulated.*

*Гайдайчук В.В., Мозговой В.В., Заец Ю.А., Шевчук Л.В.*

**Моделювання  
напружено-деформованого стану конструкції дороги під  
дією транспортних навантажень // Сопротивление материалов и теория  
сооружений. – 2017. – Вып. 99. – С. 45 – 57.**

*Поставлена задача об определении напряжено-деформированного состояния слоистого дорожного массива под действием транспортных нагрузок.*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Гайдайчук Віктор Васильович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, Гайдайчуку Віктору Васильовичу.

**Мобільний тел.:** +38(097) 542-94-27;

**E-mail:** [viktor\\_gaydaychuk@ukr.net](mailto:viktor_gaydaychuk@ukr.net)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри дорожньо-будівельних матеріалів і хімії Мозговий Володимир Васильович

**Адреса робоча:** 01103 Україна, м. Київ, вул. М. Бойчука 42, Національний транспортний університет, Мозговому Володимирі Васильовичу

**Мобільний тел.:** +38(050) 506-25-64;

**E-mail:** [mozgovyy@gmail.com](mailto:mozgovyy@gmail.com)



**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики Засць Юлія Олександрівна

**Адреса робоча:** 01103 Україна, м. Київ, вул. М. Бойчука 42, Національний транспортний університет, Засць Юлії Олександрівні

**Мобільний тел.:** +38(097) 971-23-51;

**E-mail:** [vzaets@gmail.com](mailto:vzaets@gmail.com)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, асистент кафедри вищої математики Шевчук Людмила Володимирівна

**Адреса робоча:** 01103 Україна, м. Київ, вул. М. Бойчука 42, Національний транспортний університет, Шевчук Людмилі Володимирівні

**Мобільний тел.:** +38(066) 715-36-33;

**E-mail:** [Ludmilashevchuk25@gmail.com](mailto:Ludmilashevchuk25@gmail.com)

УДК 539.3

**ФОРМУЛЮВАННЯ ТА РОЗРАХУНКОВІ СПІВВІДНОШЕННЯ  
ЗАДАЧІ МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ ДЛЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ  
ПІД ДІЄЮ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ В РАМКАХ  
НАПІВАНАЛІТИЧНОГО МЕТОДУ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ****В.А. Баженов,**

доктор технічних наук, професор

**І.І. Солодей,**

доктор технічних наук, старший науковий співробітник

**М.О. Вабішевич,**

кандидат технічних наук

**О.О. Чепурна,***Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, 03680*

Розглянуті основні вихідні параметри задач механіки руйнування та існуючі методики розрахунку для неоднорідних просторових тіл з тріщинами в умовах нелінійних динамічних впливів.

**Ключові слова:** динаміка, тріщина, призматичні тіла, тіла обертання, напіваналітичний метод скінчених елементів, нелінійне деформування, спеціальний скінчений елемент.

**Вступ.** В попередніх роботах [2, 7, 8], присвячених задачам механіки руйнування при динамічних навантаженнях, автори обмежувались дослідженням просторових призматичних тіл та тіл обертання з поздовжніми тріщинами в межах пружних деформацій.

Дана стаття присвячена постановці нової задачі, яка значно розширює клас об'єктів, що досліджується, як за геометричним, так і фізичними характеристиками.

Планується розробити на базі НМСЕ нові підходи для визначення параметрів тріщиностійкості в просторових тілах із суттєво неоднорідними фізико-механічними властивостями при наявності тріщин, що розвиваються під дією динамічного навантаження.

Для проведення досліджень обрані об'єкти, кожен з яких має характерні особливості, врахування яких потребує як корекції методик, розроблених в попередніх роботах, так і створення нових.

Одним із означених об'єктів є опорний пристрій, який являє собою циклічно симетричне тіло з граничним випадком неоднорідності (див. рис. 1), тобто об'єкт містить вирізи, які порушують осьову симетрію форми. Крім того, як було показано в роботах Баженова В.А., Гуляра О.І.,

Солодея І.І. при квазістатичних та динамічних навантаженнях на границях з'єднань циліндричної частини з виступами виникають зони пластичної течії. При наявності тріщин в цих зонах, за умови динамічного навантаження, застосування традиційних підходів до визначення тріщиностійкості об'єкту є неможливим, оскільки параметри задачі не відповідають тим обмеженням, які накладаються на застосування КІН чи  $J$ -інтеграла. На прикладі дослідження залишкової міцності стикових накладок кілів літака типу МІГ-29 та динамічного деформування захисної оболонки реактора з поздовжньою тріщиною, планується провести аналіз ефективності застосування нового параметра тріщиностійкості

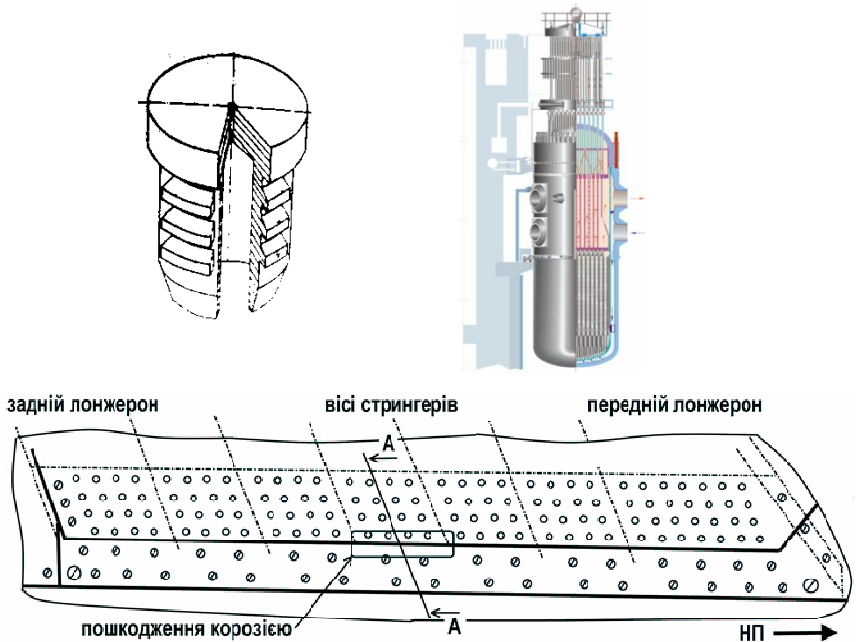


Рис. 1. Опорний пристрій, кіл літака та захисна оболонка реактора (загальний вигляд)

**1. Вихідні співвідношення.** Опис геометричних і механічних характеристик об'єктів, початкових і граничних кінематичних умов, зовнішніх навантажень здійснюється в базисній ортогональній круговій циліндричній або декартовій системах координат  $Z^{i'}$ .

Вважається, що в будь-якій точці тіла відомий однозначний зв'язок між базисною і місцевою системами координат, який визначається за допомогою прямого і зворотного тензорів перетворення координат:

$$z_{,j}^{i'} = \frac{\partial Z^{i'}}{\partial x^j}, \quad x_{,j'}^i = \frac{\partial x^i}{\partial Z^{j'}}. \quad (1)$$

Тут і надалі, індекси, що позначені латинськими літерами, приймають значення 1, 2, 3; а грецькими – 1, 2; кома перед індексом показує операцію диференціювання.

Коваріантні компоненти метричного тензора місцевої системи координат можна представити через коваріантні компоненти базисної системи:

$$g_{ij} = z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} g_{m'n'}. \quad (2)$$

Контраваріантні компоненти знаходяться по відомим коваріантним:

$$g^{ij} = \frac{A(g_{ij})}{g}, \quad (3)$$

де  $A(g_{ij})$  - алгебраїчне доповнення до елемента  $g_{ij}$ ,  $g = \det[g_{ij}]$  - визначник матриці.

В загальному випадку компоненти тензора деформацій в місцевій системі координат визначаються співвідношенням:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (4)$$

де  $u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j}$ ,  $\Gamma_{ij}^k$  - символи Кристофеля другого роду,  $u_i$  - переміщення в місцевій системі координат.

Для зручності представимо переміщення і символи Кристофеля їх значеннями в базисній системі координат:

$$u_k = z_{,k}^{m'} u_{m'}, \quad (5)$$

$$\Gamma_{ij}^k = x_{,r'}^k z_{,i}^{m'} \left( z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{r'} + \frac{\partial z_{,j}^{r'}}{\partial z_{,m'}} \right), \quad (6)$$

де

$$z_{,k}^{s'} x_{,r'}^k = \delta_{r'}^{s'}. \quad (7)$$

Після підстановки (5) – (7) в (4) отримуємо формулу для подання компонент тензора деформацій в місцевій системі координат через компоненти переміщень в базисній [3]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'}) - u_{k'} z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{k'}. \quad (8)$$

Опис призматичних тіл та тіл обертання із змінними геометричними та фізико-механічними параметрами найбільш природно проводити в ортогональній циліндричній:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = 1, \quad g_{3'3'} = (Z^{2'})^2, \quad \Gamma_{3'3'}^{2'} = -Z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{Z^{2'}} \quad (9)$$

та декартовій системах координат:

$$g_{1'1'} = g_{2'2'} = g_{3'3'} = 1, \quad \Gamma_{l'm'}^{k'} = 0. \quad (10)$$

В цьому випадку компоненти метричного тензора в місцевій системі координат подаються через компоненти в базисній по формулі:

$$g_{ij} = z_{,i}^{l'} z_{,j}^{l'} + z_{,i}^{2'} z_{,j}^{2'} + z_{,i}^{3'} z_{,j}^{3'} g_{3'3'}. \quad (11)$$

Зв'язок між переміщеннями і деформаціями (8) можна записати у вигляді:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{k',i} z_{,j}^{k'} + u_{k',j} z_{,i}^{k'} \right) - u_{2',i} z_{,j}^{3'} z_{,j}^{2'} \Gamma_{3'3'}^{2'} - u_{3',i} z_{,j}^{2'} z_{,j}^{3'} \Gamma_{2'3'}^{3'} - u_{3',i} z_{,j}^{3'} z_{,j}^{2'} \Gamma_{3'2'}^{3'}. \quad (12)$$

Важливим частковим випадком, що має самостійне практичне значення, є об'єкти з напрямною канонічної форми, для яких геометричні рівняння (12) значно спрощуються. Це насамперед неоднорідні кругові тіла обертання та призматичні прямолінійні тіла із змінною площею поперечного перерізу.

В силу збіжності  $x^3$  і  $Z^{3'}$ , та ортогональності їх до площини поперечного перерізу в циліндричній системі координат ( $0 \leq x^3 \leq 2\pi$ ):

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,3}^{\alpha'} = 0, \quad z_{,3}^{3'} = 1, \quad (13)$$

в декартовій ( $0 \leq x^3 \leq 2$ ):

$$z_{,\alpha}^{3'} = z_{,3}^{\alpha'} = 0, \quad z_{,3}^{3'} = a, \quad (14)$$

де  $a$  – половина довжини тіла.

Враховуючи (13) і (14), співвідношення (12) приймають вигляд в ортогональній циліндричній системі координат:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right), \quad \epsilon_{\alpha 3} = \frac{1}{2} \left( u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3} - \frac{2z_{,\alpha}^{2'} u_{3'}}{Z^{2'}} \right), \quad (15)$$

$$\epsilon_{33} = u_{3',3} + Z^{2'} u_{2'},$$

в декартовій:

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',\beta} + z_{,\beta}^{\gamma'} u_{\gamma',\alpha} \right), \\ \epsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left( a u_{3',\alpha} + z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma',3} \right), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\varepsilon_{33} = au_{3,3}.$$

Компоненти тензора напружень в місцевій системі координат виражаються через компоненти тензора деформацій на основі узагальненого закону Гука [3]:

$$\sigma^{ij} = d^{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (17)$$

В ізотропному тілі компоненти тензора пружних сталих  $d^{ijkl}$  пов'язані з коефіцієнтами Ляме  $\lambda$  і  $\mu$  співвідношеннями [3, 5]:

$$d^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{il} g^{jk} + g^{il} g^{jk}), \quad (18)$$

де  $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ ,  $E = E(Z')$ ,  $\nu = \nu(Z')$  - значення модуля пружності і коефіцієнта Пуассона в точці тіла, що розглядається.

Припускається, що в процесі навантаження в об'ємі тіла виникають пружні  $\varepsilon_{ij}^e$  і миттєві пластичні  $\varepsilon_{ij}^p$  деформації. Опис пластичного деформування матеріалу ґрунтується на наступних загальних гіпотезах та припущеннях, що базуються на експериментальних даних [3]:

1. Матеріал тіла однорідний і ізотропний, зміна його об'єму - лінійно-пружна:

$$\varepsilon_{kk}^p = 0. \quad (19)$$

2. Компоненти тензора приросту деформацій  $d\varepsilon_{ij}$  складаються з приросту пружних  $d\varepsilon_{ij}^e$  і пластичних  $d\varepsilon_{ij}^p$  складових:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p. \quad (20)$$

3. Зворотна частина тензора приросту деформацій однозначно пов'язана з тензором напружень і його приростом:

$$d\varepsilon_{ij}^e = k_{ijkl} d\sigma^{kl} + dk_{ijkl} \sigma^{kl}. \quad (21)$$

4. Область пружних деформацій обмежена поверхнею текучості, рівняння якої в просторі напружень має вигляд:

$$f(\sigma^{ij}, \chi) = 0, \quad (22)$$

де  $\chi$  - параметр зміцнення.

5. У відповідності з асоційованим законом пластичної течії пластичні деформації розвиваються по нормалі до поверхні текучості:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial S_{ij}} = d\lambda S_{ij}. \quad (23)$$

Для ізотропно зміцнюваного матеріалу при умові текучості Мізеса рівняння поверхні має вигляд:

$$f = \frac{1}{2} S_{ij} S^{ij} - \tau_s^2(\chi), \quad (24)$$

де  $\tau_s$  - границя текучості при чистому зсуві,  $\chi = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$  - параметр

Одквіста,  $S^{ij} = \sigma^{ij} - \sigma_0 g^{ij}$  - компоненти девіатора напружень,  $\sigma_0 = \frac{1}{3} \sigma^{ij} g_{ij}$ .

Рух неоднорідного ізотропного тіла, об'ємом  $V$ , обмеженого поверхнею  $S$  описується рівнянням, що є наслідком принципу Д'Аламбера, покомпонентна форма якого в криволінійній системі координат приймає вигляд:

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} z_{j,k}^{i'} \sigma^{kj'}) + f^{j'} = \rho \ddot{u}^{j'}. \quad (25)$$

Однозначність розв'язання (25) забезпечується запровадженням відповідних початкових і граничних умов.

Початкові умови становить відомий розподіл переміщень та швидкостей в тілі у деякий фіксований момент часу  $t_0$ , який приймається за початок часової координати:

$$u(Z^{i'}, t_0) = u_0(Z^{i'}), \quad \dot{u}(Z^{i'}, t_0) = \dot{u}_0(Z^{i'}), \quad Z^{i'} \in V. \quad (26)$$

Припускається, що на частині поверхні  $S_u$  задані кінематичні граничні умови:

$$u(Z^{i'}, t) = \tilde{u}(Z^{i'}, t), \quad Z^{i'} \in S_u, \quad (27)$$

а на поверхні  $S_p$  з нормаллю  $\vec{n} = n_j e^j$  - довільно орієнтована у просторі та у часі система навантажень:

$$z_{i'}^{k'} \sigma^{ij} n_j = \tilde{p}(Z^{k'}, t), \quad Z^{k'} \in S_p. \quad (28)$$

При нелінійному деформуванні матеріалу, корекція напружень на кожній ітерації кроку за часом здійснюється згідно з методикою Уїлкінса за наступною формулою [4]:

$$\sigma^{ij, t+\Delta t} = \sigma_o^{ij, t+\Delta t} + S^{ij, t+\Delta t} \frac{\tau_s^{t+\Delta t}}{T^{t+\Delta t}}, \quad (29)$$

де  $\sigma_o^{ij}$  - компоненти шарового тензору,  $T = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij}^e S_e^{ij}}$  - інтенсивність дотичних напружень. Корекція напружень за формулою (29) виконується тільки за умови, коли  $\tau_s^{t+\Delta t} < T^{t+\Delta t}$ .

Геометрична інтерпретація цього алгоритму для одновимірного випадку представлена на прикладі діаграми одноосного деформування матеріалу в осях  $T - \gamma$  (рис. 3.2), де  $\gamma$  - інтенсивність деформацій зсуву.

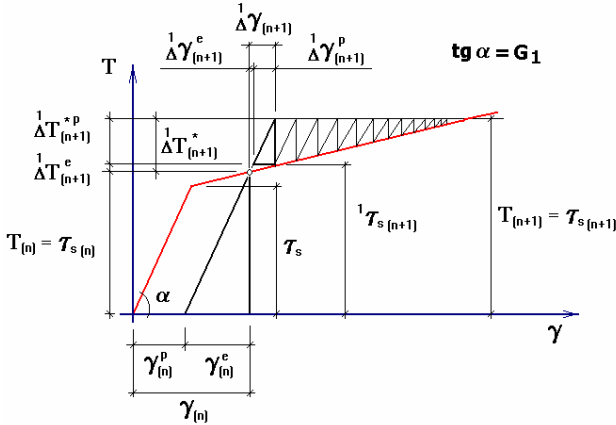


Рис. 2

Нехай в даний момент часу  $n$  об'єкт знаходиться у стані, що відповідає навантаженню  $\hat{Q}_{(n)}$  і позначається на діаграмі точкою  $(T(n), \gamma(n))$ . Прирощення навантаження на кроці за часом  $n+1$  становить  $\Delta \hat{Q}_{(n+1)}$ , а повне навантаження обчислюється за формулою  $\hat{Q}_{(n+1)} = \hat{Q}_{(n)} + \Delta \hat{Q}_{(n+1)}$ . Прирощення навантаження веде до зміни переміщення на величину  $\Delta U_{(n+1)}$ . Цим переміщенням на першій ітерації кроку за часом відповідає інтенсивність деформацій зсуву  $\Delta^1 \gamma_{(n+1)}$ . Обчислені за законом Гука напруження та інтенсивність їх девіатора  $T_{(n+1)} = T_{(n)} + \Delta^1 T_{(n+1)}^*$  перевищує поточну границю пружності матеріалу  $\tau_{s(n)}$ , тому приводимо її у відповідність з діаграмою деформування, тобто зменшуємо до рівня  ${}^1 \tau_{s(n+1)}$ .

Виділивши із прирощення інтенсивності дотичних напружень  $\Delta^1 T_{(n+1)}^* = \Delta^1 T_{(n+1)}^e + \Delta^1 T_{(n+1)}^{*p}$  дійсну  $\Delta^1 T_{(n+1)}^e$  і фіктивну частини  $\Delta^1 T_{(n+1)}^{*p} = T_{(n+1)} - {}^1 \tau_{s(n+1)}$ , обчислюємо прирощення пластичних  $\Delta^1 \gamma_{(n+1)}^p = \Delta^1 T_{(n+1)}^{*p} / G_1$  і пружних  $\Delta^1 \gamma_{(n+1)}^e = \Delta^1 \gamma_{(n+1)} - \Delta^1 \gamma_{(n+1)}^p$  деформацій



на першій ітерації кроку за часом. Скореговані напруження, що відповідають інтенсивності  $T_{(n)} + \Delta^1 T_{(n+1)}^e$ , призводять до порушення рівноваги системи рівнянь (нев'язки). На кожному кроці за часом ітераційний процес закінчується на ітерації  $I=i$ , якщо виконується задана точність розв'язання, що відповідає на діаграмі напруженому стану  $T_{(n+1)}$ . По закінченні ітераційного процесу отримуємо повні приращення інтенсивності пластичних деформацій

**2. Огляд критеріїв тріщиностійкості.** Розглядаються просторові тіла з поздовжніми та поперечним тріщинами, що розвиваються (рис. 3).

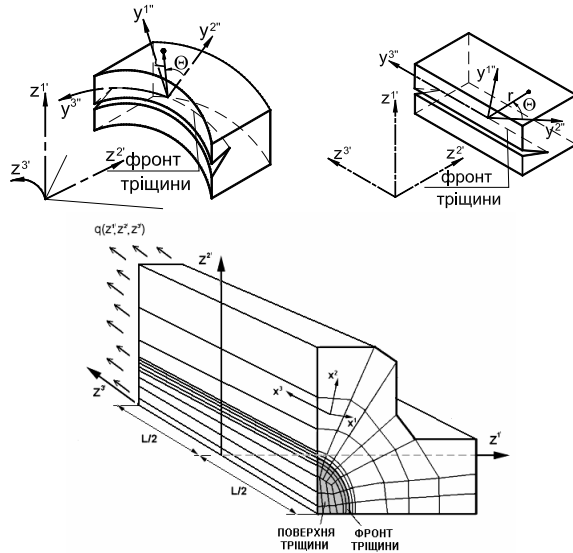


Рис. 3. Фрагменти тіл з тріщинами

Застосування  $J$ -інтеграла Черепанова-Райса

$$J_k(t) = \frac{1}{\Delta} \int_S \left[ (W + T) n_k - f_i \frac{\partial u_i}{\partial x^k} \right] dS, \quad (30)$$

як основного параметра тріщиностійкості, при дослідженні стаціонарних тріщин в умовах статичних та динамічних навантажень в межах пружних деформацій показало високу ефективність та достовірність. Тут  $S = S_k + S_1 + S_2$  - поверхня інтегрування,  $n_k$  - проекція на вісь  $x^k$  одиничної зовнішньої нормалі до поверхні  $S$ ,  $f_i$  - проекція на вісь  $x^k$

вектора зусиль на поверхні  $S$ ,  $u$  - переміщення,  $W$  і  $T$  - потенціальна та кінетична енергії відповідно.

Однак в умовах розвитку тріщини при наявності пластичної течії та довільної історії навантаження необхідним є застосування іншого параметру руйнування, який може врахувати особливості поведінки тіла з тріщиною в зазначених умовах. Одним з таких параметрів є  $T$ -інтеграл, вираз для запису якого містить додатковий член у вигляді інтегралу по області, який враховує наявність масових сил та навантажень, прикладених до поверхонь тріщини.

$$T^* = \int_{\Gamma_\varepsilon} ((W+T)n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) d\Gamma \equiv \int_{\Gamma+S_{CT}} ((W+T)n_1 - t_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1}) d\Gamma - \int_{V_T - V_\varepsilon} \left[ \left( \frac{\partial W}{\partial x_1} - \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x_1} \right) + \rho \left( \dot{u}_i \frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_1} - \ddot{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right) + f_i \frac{\partial u_i}{\partial x_1} \right] dv, \quad (31)$$

де  $W$  - повна робота напружень в матеріальній точці, яка визначається згідно з формулою:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}, \quad (32)$$

а  $\frac{\partial W}{\partial x_1}$  розраховується безпосередньо шляхом обчислення в двох точках, які знаходяться на нескінченно малій відстані одна від одної.

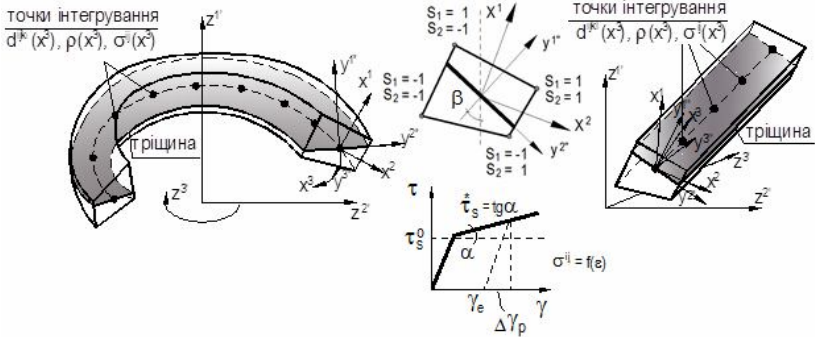
**3. Спеціальний скінчений елемент.** При чисельному дослідженні об'єктів з рухомою тріщиною на основі методу скінчених елементів, як правило застосовують стаціонарну [1] або рухому сітку [1,9,10].

Відмінність першої полягає в переносі вершини тріщини з одного вузла на інший без порушення топології скінчено елементної сітки.

$$\int_V (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \rho \dot{u}_i \delta u_i) dV - \int_{S_\sigma} \bar{T}_i \delta u_i dS - \int_{CD} \delta (T_2 u_2) dS = 0. \quad (33)$$

При застосуванні другого підходу при рості тріщини змінюється або вся сітка, або рухається тільки сітка малої області, яка оточує вершину тріщини.

Для дослідження означених в статті об'єктів буде використаний метод рухомої сітки в поєднанні із застосуванням рухомого сингулярного (спеціального) скінченого елемента на вершині тріщини.



Для розв’язання динамічних задач пружнопластичного деформування в рамках напіваналітичного метода скінченних елементів пропонується проблемно-орієнтований скінченний елемент з тріщиною, що враховує непроникнення її берегів. Необхідність такої модифікації викликана спостереженнями за хвилями напружень різних знаків в задачах динаміки в області тріщини.

$$\sigma^{1'1''} \leq 0, \sigma^{1'2''} = 0, \sigma^{1'3''} = 0,$$

$$\sigma^{1'1''} = 0 \text{ - розкриття берегів тріщини,}$$

$$\sigma^{1'1''} \neq 0 \text{ - контакт берегів тріщини,} \tag{34}$$

$$d_*^{mnst} = d^{mnst} - d_p^{mnst} - d_c^{mnst} - d_q^{mnst} \tag{35}$$

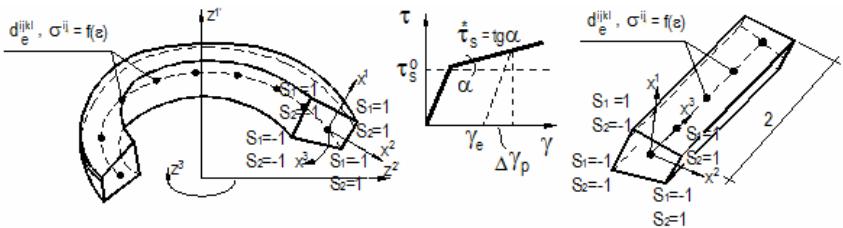
$$d_p^{mnst} = \frac{2\mu}{1 + (\lambda/2\mu)} S^{mn} S^{st}, S^{mn} = \frac{\lambda}{2\mu} g^{mn} + C_{1n}^m C_{1n}^n, \tag{36}$$

$$d_c^{mnst} = \mu (r_{1n}^{ns} r_{2n}^{mt} + r_{1n}^{ms} r_{2n}^{nt} + r_{1n}^{nt} r_{2n}^{ms} + r_{1n}^{mt} r_{2n}^{ns}),$$

$$d_q^{mnst} = \mu (r_{1n}^{ns} r_{3n}^{mt} + r_{1n}^{ms} r_{3n}^{nt} + r_{1n}^{nt} r_{3n}^{ms} + r_{1n}^{mt} r_{3n}^{ns}),$$

$$r_{in}^{ms} = C_{(i'n)}^m C_{(i'n)}^s, C_{i'n}^m = C_k^m C_{i'n}^{k'}, C_{i'n}^{k'} = \cos(Z^{k'} \wedge y^{i'n}). \tag{37}$$

При виникненні рівня напружень, що перевищують межу текучості, використовується алгоритм заснований на поєднанні метода додаткових навантажень та ітераційної процедури Н'ютона-Канторовича.



$$d\sigma^{ij} = d_e^{ijkl} d\epsilon_{kl}, \quad (38)$$

$$d_e^{ijkl} = d^{ijkl} - \frac{4G^2 S^{ij} S^{kl}}{\gamma}, \quad (39)$$

$$\gamma = 4\tau_s^2 \left( G + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \chi} \right),$$

$$\chi = \int \sqrt{\frac{2}{3} d\epsilon_{ij}^p d\epsilon_{ij}^p},$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial S^{ij}} dS^{ij} + \frac{\partial f}{\partial \chi} d\chi = 0, \quad d\lambda = \frac{S_{ij} d^{ijkl} d\epsilon_{kl}}{\gamma}. \quad (40)$$

**Висновки.** Виконаний аналіз існуючих підходів до вирішення задач механіки руйнування для неоднорідних тіл з тріщинами, що розвиваються в умовах динамічного навантаження, вказує на необхідність розвитку чисельних методів для розв'язку означеного класу задач. Таким чином, подальший розвиток застосування НМСЕ для обчислення динамічних параметрів механіки руйнування в умовах росту тріщин є актуальним.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атлурі С.* Вычислительные методы в механике разрушения.- Москва: Мир, 1990.- 392с.
2. *Баженов В.А., Вабищевич М.О., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Особливості обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень при динамічному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. - К.:КНУБА, Вип.82, 2008.- С. 39-47.
3. *Блох В.И.* Теория упругости / [Блох В.И.] - Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. —483с.
4. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности. - М.: Изд. технико-теоретич. лит., 1963. - 327 с.
5. *Коротких Ю.Г.* Основные уравнения термопластичности при сложном нагружении / Коротких Ю.Г., Белевич С.М. // Методы решения задач упругости и пластичности.- Горький, 1969.- С.134-141.
6. Метод конечных элементов в механике твердых тел / [Сахаров А.С., Кислокий В.Н., Киричевский В.В. и др.] - Киев: Вища школа, 1982. – 479 с.
7. *Солодей І.І., Вабищевич М.О., Гуляр О.І., Сахаров О.С.* Обчислення коефіцієнта інтенсивності напружень в нестационарних задачах динаміки просторових тіл на основі енергетичного підходу // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.83, 2009.- С. 39-47.
8. *Солодей І.І., Вабищевич М.О., Гуляр О.І.* Розв'язання нестационарних задач механіки руйнування на основі апроксимації тріщини спеціальними скінченими елементами // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник – К.:КНУБА, Вип.85, 2009.-с.38-53.
9. *Atluri S.N., Nishioka T.* Hybrid methods of analysis. - Unification of Finite Element Methods, Ed. N. Kardestuncer. - Amsterdam: North-Holland, 1984, p. 65-96.
10. *Yagata G., Sakai Y., Ando Y.* Analysis of a rapidly propagating crack using finite elements. - Fast Fracture and Crack Arrest, Eds. G. T. Hahn., M. F. Kanninen, ASTM STP 627, 1977, p. 109-122.

## REFERENCES

1. *Atluri S.* Vyichislitelnyie metody v mehanike razrusheniya. (Computational methods in fracture mechanics)- Moskva: Mir, 1990.- 392s.
2. *Bazhenov V.A., VabIschevich M.O., Gulyar O.I., Solodey I.I.* Osoblivostsi obchislennya koeffitsientiv intensivnosti napruzhen pri dinamichnomu navantazhenii (Features of the calculation of stress intensity factors under dynamic loading) // *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tehn. zbirnik.* - K.:KNUBA, Vip.82, 2008.-s.39-47.
3. *Bloh V.I.* Teoriya uprugosti (Theory of elasticity) / [Bloh V.I.] - Harkov: Izd-vo Hark. un-ta.- 1964. -483c.
4. *Kachanov L.M.* Osnovy teorii plastichnosti (The basics of plasticity theory).- M.: Izd. tehniko-teoretich. lit., 1963.- 327 s.
5. *Korotkih Yu.G., Belevich S.M.* (Fundamentals of the theory of plasticity) // *Metodyi resheniya zadach uprugosti i plastichnosti.*- Gorkiy, 1969.- S.134-141.
6. *Metod konechnykh elementov v mehanike tverdykh tel* (The finite element method in the mechanics of solids) / [Saharov A.S., Kislookiy V.N., Kirichevskiy V.V. i dr.] - Kiev: Vischa shkola, 1982.- 479s.
7. *Solodey I.I., VabIschevich M.O., Gulyar O.I., Saharov O.S.* Obchislennya koeffitsienta intensivnosti napruzhen v nestatsionarnih zadachah dinamiki prostorovih tll na osnovi energetichnogo pidhodu (Calculation of stress intensity factor in non-stationary problems of spatial body dynamics on the basis of the energy approach)// *Opir materialiv i teoriya sporud: nauk.-tehn. zbirnik* – K.:KNUBA, Vip.83, 2009.-s.39-47.
8. *Solodey I.I., VabIschevich M.O., Gulyar O.I.* Rozv'yazannya nestatsionarnih zadach mehaniki ruynuvannya na osnovi aproksimatsiyi trischini spetsialnimi skinchenimi elementami (Solving non-stationary problems of fracture mechanics on the basis of crack approximation by special finite elements) // *Opir materialiv I teoriya sporud: nauk.-tehn. zbirnik* – K.:KNUBA, Vip.85, 2009.-s.38-53.
9. *Atluri S.N., Nishioka T.* Hybrid methods of analysis. — Unification of Finite Element Methods, Ed. N. Kardestuncer. — Amsterdam: North-Holland, 1984, p. 65—96.
10. *Yagama G., Sakai Y., Ando Y.* Analysis of a rapidly propagating crack using finite elements. — *Fast Fracture and Crack Arrest*, Eds. G. T. Hahn., M. F. Kanninen, ASTM STP 627, 1977, p. 109—122.

*Bazhenov V.A., Solodey I.I., VabIschevich M.O., Chepurna O.O.*

**THE FORMULATION AND THE CALCULATION FORMULAS FOR THE PROBLEM OF FRACTURE MECHANICS OF 3D BODIES UNDER THE INFLUENCE OF DYNAMICAL LOADS IN THE FRAMEWORK OF SAFEM**

In previous works [4, 8, 9], devoted to the dynamics of destruction, the authors were limited to studies of spatial prismatic bodies and bodies of revolution with longitudinal cracks within the linear elastic deformations.

This article is about the creation of a new task, which greatly expands the class of objects is investigated, both in the geometric and physical characteristics.

To research selected objects, each of which has characteristic features, which requires both correction methods developed in previous works, and creating new ones.

One such object is a reference device, which is a cyclically symmetric body with the limiting case of heterogeneity (see Fig. 1), that is, the object contains cuts that break the axial symmetry of the form. In addition, as was shown in the works of Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Topor O, Solodey I.I., under quasi-static and dynamic loads at the boundaries of the compounds of the cylindrical part with the tabs having a zone of plastic flow.

If there are cracks in these areas, subject to dynamic loads, the application of traditional approaches to determining the fracture toughness of the object is impossible, because the task parameters do not meet the restrictions which are imposed on the use of the SIF or the  $J$ -integral.

For example, studies of the dynamic deformation containment with a longitudinal crack should be analyze the effectiveness of the new parameter fracture toughness, which is in contrast to the  $J$ -integral Cherepanov-Rice, not to have restrictions regarding the availability of the loads applied on the crack edges.

It is planned to develop on the basis of semi-analytical finite element method new approaches for determination of fracture toughness parameters in the spatial bodies with dissimilar physical and mechanical properties in the presence of cracks that develop under the action of dynamic loads.

**Key words:** dynamics, crack, prismatic body, body rotation, semianalytic finite element method, nonlinear deformation, special finite element.

*Баженов В.А., Солодей И.И., Вабищевич М.О., Чепурная Е.А.*

**ФОРМУЛИРОВАНИЕ И РАСЧЕТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК В РАМКАХ ПОЛУАНАЛИТИЧЕСКОГО МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

В работе проведен анализ современного состояния проблемы изучения пространственных тел с трещинами, развивающихся в условиях динамического воздействия. Статья посвящена постановке новой задачи, которая значительно расширяет класс исследуемых объектов, как за физическими, так и геометрическими характеристиками.

**Ключевые слова:** динамика, трещина, призматические тела, тела вращения, полуаналитический метод конечных элементов, нелинейное деформирование, специальный конечный элемент.

**Автор:** доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки, директор НДІ будівельної механіки Баженов Віктор Андрійович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38(050)351-66-21

**E-mail:** [yikabazh@ukr.net](mailto:yikabazh@ukr.net)

**Автор:** доктор технічних наук, старший науковий співробітник, зав. відділом НДІ будівельної механіки СОЛОДЕЙ Іван Іванович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38(050)357-44-90

**E-mail:** [isolodev@gmail.com](mailto:isolodev@gmail.com)

**Автор:** кандидат технічних наук, докторант кафедри будівельної механіки Вабищевич Максим Олегович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38(050)928-40-97

**E-mail:** [vabix@ukr.net](mailto:vabix@ukr.net)

**Автор:** Чепурна Олена Олександрівна

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-55

УДК 517.11+519.92+539.3

## ВИЗНАЧЕННЯ МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕННЯ НАВАНТАЖЕННЯ СТИСНУТОЇ ОРТОТРОПНОЇ ОБОЛОНОКИ В УМОВАХ ВИПАДКОВОЇ, НЕЧІТКОЇ І НЕТОЧНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

**В.О. Бараненко,**

д-р техн. наук, професор кафедри будівельної механіки

**Д.Л. Волчок,**

канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури  
вул. Чернишевського, 24а, м. Дніпро, 49600*

В даній роботі розглядається задача визначення максимального значення стискаючої сили стиснутої ортотропної циліндричної оболонки при одночасному виконанні умов трьох граничних станів (міцності, загальної та місцевої втрати стійкості) в умовах неповної інформації. Оболонка виконана із склопластику, армованого в двох взаємно перпендикулярних напрямках, які співпадають з осьовим та окружним напрямками. В роботі наведено результати впливу характеристик інформаційної гранули тої чи іншої невизначеності на оптимальні розв'язки. Розроблено алгоритм реалізації поставлених оптимізаційних моделей. Наведено числові приклади.

**Ключові слова:** циліндрична армована оболонка, нечіткі величини, неточні величини, випадкові величини, інформаційна гранула, оптимальне проектування конструкцій.

### Вступ

В області методології оптимального проектування конструкцій та їх елементів зроблено чимало. У той же час, при формуванні проектних рішень ще рідко враховуються невизначеності в завданні характеристик матеріалів конструкцій, факторів середовища, параметрів силових впливів і геометрії, структури та ін.

На початкових етапах проектування практично не розглядаються питання неточності вихідної проектною інформації. Введення цих питань в традиційні суворі методи реалізації оптимізаційних задач теж не розглядаються. Сама задача пошуку ефективного проекту стає некоректною і можна говорити лише про прийнятне рішення.

Таким чином, в теорії проектування конструкцій, в тому числі й оптимального, де переважає детерміністичний підхід, викликає певний інтерес розгляд більш загальних задач, в яких би враховувалась та чи інша невизначеність: випадковість реалізації, нечіткість опису, неточність завдання вихідної інформації про перелічені вище характеристики. Для формулювання оптимізаційних задач та їх розв'язання необхідний такий математичний апарат, який мав би можливість апіорі враховувати ці невизначеності [1]. Таким апаратом для урахування чинників випадкової природи стала теорія ймовірностей, на базі якої була розвинена теорія

надійності, що широко використана в інженерії [2, 3, 4]. Априорне врахування факторів, які описані нечітким і неточним чином, стало можливим, відповідно, в рамках теорії нечітких і неточних множин [5 - 10]. Методи реалізації задач проектування, що розроблені в рамках зазначених теорій, а також методи дослідження такі, як генетичні алгоритми, нейронні мережі та ін. демонструють значні успіхи при розв'язанні багатьох задач оптимізації. Об'єднання і комбінування перелічених підходів дослідження утворюють новий напрям в обчислювальній математиці, який називається м'які обчислення". Цей термін був уведений в 1994 р. фундатором теорії нечітких множин американським математиком Лотфі Заде. Сутність такого напрямку відповідно до вислову цього вченого полягає в тому, "що на відміну від традиційних жорстких обчислень методи м'яких обчислень націлені на пристосування до неточності опису реального світу – «терпимості» до неточності, невизначеності та часткової істинності ... для кращого узгодження з реальністю".

У даній роботі розглянуті теоретичні основи створення імітаційних, нечітких і неточних моделей стосовно задачі визначення максимального значення осьової сили, яка стискує оболонку з урахуванням трьох граничних станів (місцевої та загальної втрати стійкості, міцності) в умовах невизначеності (стохастичної, нечіткої і неточної природи) про деякі параметри.

### 1. Визначення та об'єкт оптимізації

Розглядається ортотропна кругова циліндрична оболонка, шарнірно оберта по кінцях, з геометричними параметрами: товщиною  $h$ , радіусом  $R$  і довжиною  $L$ . Оболонка виконана зі склопластику. Матеріал армований в двох взаємно перпендикулярних напрямках, які збігаються з поздовжнім і окружним напрямками оболонки [11].

Передбачається, також що:

- 1) коефіцієнт об'ємного армування є постійною величиною;
- 2) відносний вміст армованих волокон  $\theta$  в поздовжньому (осьовому) напрямку є величина змінна.

Відповідно до лінійним наближенням в теорії армування має місце для модулів пружності оболонки

$$E_1 = \theta E; \quad E_2 = (1 - \theta)E, \quad (1)$$

де  $E$  визначається модулем пружності армуючих волокон в осьовому напрямку [12];

- 3) оболонка стиснута в осьовому напрямку силою  $F$ ;

- 4) межа міцності на стиск дорівнює  $\sigma_0$ .



Сформулюємо таку задачу оптимізації: при заданих значеннях параметрів  $h, R, L, \theta, \sigma_0, E$  і умов збереження стійкості і міцності знайти максимальне значення стискаючої сили  $F^*$ .

В якості фізичних обмежень сформульованої задачі призначимо наступні співвідношення [13]

$$F_{kp}^M \geq F^*; F_{kp}^O \geq F^*; F_R \geq F^*, \quad (2)$$

де

$$F_{kp}^M = g_1(h, \theta) = Bh^2 \sqrt{\theta(1-\theta)}; B = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} E; \quad (3)$$

$$F_{kp}^O = g_2(h, R, \theta) = ChR^3\theta; C = \frac{\pi^3}{L^2} E; \quad (4)$$

$$F_R = g_3(h, R, \theta) = DhR^3\sqrt{\theta^2}; D = 2\pi\sigma_0. \quad (5)$$

Функції  $g_j$ ;  $j=1,2,3$  є дійснозначні. У співвідношеннях (2) - (5) наведені наближені вирази для:  $F_{kp}^M$  – критичного осьового зусилля при шарнірному закріпленні оболонки в припущенні достатньої зсувної жорсткості в трансверсальній площині і площині оболонки;  $F_{kp}^O$  – критичного зусилля в разі шарнірного обпирання стержня з кільцевих поперечним перерізом;  $F_R$  – міцності оболонки на стиск.

Перше обмеження в (2) визначає можливість місцевої втрати стійкості оболонки. Друге обмеження в (2) визначає можливість повної втрати стійкості стержня. Можливість руйнування оболонки на стиск її силою  $F$ , визначає третє обмеження в (2).

Сформулюємо детерміновану задачу знаходження максимального значення  $F^*$ , яка задовольняє умовам (2)-(5). Нехай вихідні дані  $h, R, L, \theta, \sigma_0, E$  утворюють сукупність  $u = \{u_i\}$ ;  $i=1,2,\dots,n$ ; ( $n=6$ ). За змістом задачі компоненти цієї сукупності є додатними величинами. Сформульовану вище оптимізаційну задачу запишемо в термінах уведених вище позначень

$$F_{det}^* = \arg \left\{ \max_{F^- \leq F \leq F^+} F \mid g_j(u) \geq F^*; j=1,2,3 \right\}. \quad (6)$$

Вона буде в подальшому прототипом інших задач в умовах невизначеності.

## 2. Задача максимізації критичної сили при наявності невизначеності в завданні вихідних параметрів

Нехай в сукупності  $u$  деяка частина є невизначеною  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r\}$ ;  $r \leq n$ . Цими параметрами можуть бути  $E, \sigma_0, \theta$  та інші. Інформація про

природу невизначеності компонентів вектора  $\xi$  задається, відповідно, функцією щільності ймовірності (для випадкових величин), функцією належності (для нечітких величин), функцією з простору наближень (для неточних величин).

Введемо вектор  $\xi$  в формулювання задачі (6). Функції  $g_j$  в обмеженнях (6) будуть також невизначеними і задача (6) набуде вигляду

$$F^* = \arg \left\{ \max F \mid g_j(u, \xi) \geq F^*; j = 1, 2, 3 \right\}. \quad (7)$$

Однак модель (7) не має сенсу, оскільки наявність в обмеженнях (2) параметра  $\xi$  не визначає будь-яку детерміновану область можливих (допустимих) розв'язків. Для подолання цієї ситуації введемо в розгляд [14]:

- міру *Prob* в імовірнісному просторі (для випадковості);
- міру *Pos* в можливістьному просторі (для нечіткості);
- міру *Tr* в просторі наближень (для неточності).

Та чи інша міра реалізує ідею використання бажаного рівня  $\beta$  ( $0 < \beta \leq 1$ ) задоволення обмежень з невизначеними параметрами. Перелічені міри об'єднаємо одним позначенням  $Ch(S_j)$ , тобто

$$Ch(S_j) = \begin{cases} \text{Prob}(S_j), & \text{для випадкової величини } \xi; (\text{ймовірність}) \\ \text{Pos}(S_j), & \text{для нечіткої величини } \xi; (\text{можливість}) \\ \text{Tr}(S_j), & \text{для неточної величини } \xi; (\text{довіра}), \end{cases} \quad (8)$$

де  $S_j$  - невизначена подія, що полягає в тому, що виконується обмеження

$$S_j : g_j(u, \xi) \geq F^*; j = 1, 2, 3. \text{ и } 0 \leq Ch(S_j) \leq 1. \quad (9)$$

І тоді задача (7) запишеться як:

$$F^* = \arg \left\{ \max F \mid Ch(S_j) \geq \beta; j = 1, 2, 3 \right\}. \quad (10)$$

Зауваження 1. Події  $S_j$ ;  $j = 1, 2, 3$ . передбачаються незалежними.

Зауваження 2. Задача (10) відноситься до так званих ССР- моделей невизначеного програмування [14].

### 3. Метод Монте-Карло

Реалізація задачі (6) була виконана на основі чисельного методу статистичних випробувань, відомого як метод Монте-Карло [15]. Суть цього методу полягає в генеруванні випадкової величини  $\xi \in [0, 1]$ , розподіленої по рівномірному закону. За допомогою цієї величини із заданого інтервалу  $[F^-, F^+]$  формується змінна  $F$  з метою подальшої її підстановки в обмеження (2). Якщо вони виконуються, то можна обирати максимальне значення  $F$ , інакше виконується нове випробування.

Кількість  $N$  випробувань задається досить великим. Це один з недоліків методу. Однак можливості сучасної обчислювальної техніки долають вказану незручність. Крім того, в разі не дуже великих значень  $N$  можуть бути використані методи випадкового пошуку [16], засновані також на методі Монте-Карло.

Розв'язання тестового прикладу для детермінованої задачі (6) методом Монте-Карло виконано при наступних вихідних даних:  $E = 35 \text{ GPa}$ ;  $\sigma_0 = 0.4 \text{ GPa}$ ;  $L = 30 \text{ см}$ ;  $h = 0.1 \text{ см}$ ;  $R = 10 \text{ см}$ ;  $\theta = 0.75$ ; При цьому взято  $F^- = 10 \text{ кН}$ ;  $F^+ = 1000 \text{ кН}$  - для 1 експерименту і  $F^- = 10 \text{ кН}$ ;  $F^+ = 200 \text{ кН}$  - для 2 уточнюючого експерименту. В таблиці 1 показана збіжність методу до граничної точки  $F_{\text{det}}^* = 54.98 \text{ кН}$  для різних величин  $N$ .

Таблиця 1

Збіжність обчислень процесу до граничної точки  $F_{\text{det}}^* = 54.98 \text{ кН}$   
для різних величин  $N$

lg $N$	$F^*$ , кН	
	1 експеримент	2 експеримент
3	54,68	54,95
4	54,86	54,972
5	54,970	54,976
6	54,977	54,978
7	54,978	54,978
8	54,978	54,978

Метод Монте-Карло в даній роботі використаний як основний інструмент імітаційного, стохастичного, нечіткого і неточного моделювання.

#### 4. Стохастичний підхід

Нехай величина  $\xi$  є стохастичної природи. В цьому випадку задача (10) переписється як

$$F_{\text{rand}}^* = \arg \left\{ \max F \mid \Pr \text{ob}(S_j) \geq \beta; j = 1, 2, 3 \right\}. \quad (11)$$

Основною обчислювальною операцією в моделі (11) є визначення ймовірності подій  $S_j$ ;  $j = 1, 2, 3$ . для випадкової величини  $\xi_i$ ;  $\xi_i \in [\xi_i^-, \xi_i^+]$   $i = 1, 2, \dots, r$ . Сутність процесу статистичного моделювання полягає в наступному. Нехай  $N$  є число всіх виконаних випробувань. У кожному випробуванні формується випадковий вектор  $\{\zeta_k\}$ ;

$\zeta_k = \xi_i^- + (\xi_i^+ - \xi_i^-) \cdot \eta_k$ ;  $i = 1, 2, \dots, r$ ;  $k = 1, 2, \dots, N$ ;  $\eta_k \in [0, 1]$  - *random* відповідно до функції розподілу величин  $\xi_i$ .

Серед векторів  $\zeta_k$ , очевидно, є такі, які задовольняють події (9). Нехай їх число буде  $N^*$ , причому  $N^* \leq N$ . Введемо до розгляду таку функцію

$$f(\zeta_k) = \begin{cases} 1, & \text{для } g_j(u, \zeta_k) \geq F \\ 0, & \text{в інших випадках.} \end{cases} \quad (12)$$

Величина  $\sum_{k=1}^N f(\zeta_k)$  є в точності число  $N^*$  випадкових векторів, що задовольняють події (9), (11). Співвідношення  $N^*/N$  визначає відносну частоту появи події  $S_j$ . Відповідно до посиленого закону великих чисел (теорема Бореля) зі збільшенням числа  $N$  незалежних випробувань відносна частота  $N^*/N$  прагне до істинної ймовірності події  $S_j$ , тобто

$$\frac{N^*}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\zeta_i) \rightarrow \text{prob}(S_j), j = 1, 2, 3 \text{ при } N \rightarrow \infty. \quad (13)$$

Максимальне значення  $F^*$  досягається при виконанні рівності  $\text{Prob}(S_j(F)) = \beta$ ;  $j = 1, 2, 3$ . Урахування визначення (13) визначає, що  $N^* = \lfloor \beta N \rfloor$ , де  $\lfloor \cdot \rfloor$  - функція Антьє. Тоді за шукане значення  $F_{rand}^*$  можна взяти  $N^*$  найбільший елемент в послідовності  $v = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ , де  $v_i = \min_j \{g_j(u, \zeta_i)\}$ ;  $j = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ .

#### 4.1. Чисельна ілюстрація

За запропонованою тут обчислювальною процедурою виконано чотири числових експерименти, в яких випадковими величинами є  $\xi_1 = E$  і  $\xi_2 = \sigma_0$ , розподілені по трикутному закону  $T(a, m, b)$  з функцією щільності ймовірності: якщо  $a < x \leq m$ , то  $f(x) = \frac{2(x-a)}{(b-a)(m-a)}$ ; якщо

$m < x \leq b$ , то  $f(x) = \frac{2(b-x)}{(b-a)(b-m)}$ , в інших випадках  $f(x) = 0$ . Тут

$a < m < b$ ;  $a = m - \Delta$ ;  $b = m + \Delta$ . Через  $\Delta$  позначено величину відхилення (розкиду) від модального значення  $m_\xi$  випадкової величини  $\xi$ . Вихідні характеристики цих експериментів наводяться в таблиці 2.

Таблиця 2

Початкові дані експериментів при

$h = 0,1 \text{ см}; R = 10 \text{ см}; L = 30 \text{ см}; \theta = 0,75; m_E = 35 \text{ GPa}; m_{\sigma_0} = 0,4 \text{ GPa};$   
 $\Delta_{\sigma_0} = 0,005 \text{ GPa}; N = 2 \cdot 10^5$

№ експерименту	1	2	3	4
$\Delta_E, \text{ GPa}$	3	1	0,5	0,1
% відхилення $\Delta$ від $m_E$	8,6	2,9	1,4	0,3
% відхилення $F_{rand}^*$ від $F_{det}^*$	8,6	1,8	0,4	0,1

Результати обчислень максимального значення  $F_{rand}^*(\beta)$  представлені на рис. 1.

Як і очікувалося, збіжність значення  $F_{rand}^*$  до  $F_{det}^*$  відбувається за рахунок зменшення величини відхилення  $\Delta_E$ . При цьому величина  $\Delta_{\sigma_0}$  в трьох експериментах не змінювалася. Аналізуючи дані рядка % таблиці 2, робимо висновок, що помилки завдання вихідних  $E$  і  $\sigma_0$  стохастичної природи тягнуть за собою помилки такого порядку, і в результаті. На рис. 1 графічно представлена залежність поведінки функції

$F_{rand}^*(\beta)$  від рівня ймовірності  $\beta$ . З цього рисунку видно, що наслідком збільшення рівня ймовірності ( $0,5 < \beta \leq 1$ ) виконання всіх трьох обмежень в (11) є зменшення величини сили  $F_{rand}^*$ . І навпаки, зменшення рівня ймовірності ( $0 < \beta < 0,5$ ) є результат збільшення значень  $F_{rand}^*$ . При  $\beta = 0,5$  результат реалізації стохастичною задачі нелінійного програмування є таке ж розв'язання, як і при детермінованих даних ( $F_{rand}^*(\beta) = 54,98 \text{ кН}$ ).

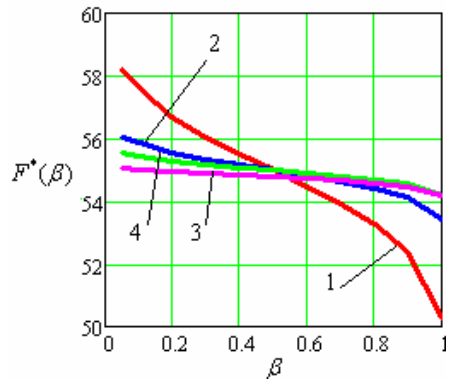


Рис. 1. Графік поведінки значення критичної сили  $F_{rand}^*(\beta)$  в чотирьох експериментах в залежності від рівня заданої ймовірності  $\beta$

## 5. Нечітке моделювання

Нехай компоненти вектора  $\xi$  описуються нечітким чином: словесними квантифікаторами лінгвістичної змінної «точність даних» - «приблизно», «близько», «трохи більше», «трохи менше», «в інтервалі» і т.д. Тоді події  $S_j$ , визначені в (9), є також нечіткі і задача (10) з урахуванням уведення міри нечіткості - можливості - буде такою

$$F^* = \arg \left\{ \max F \mid \text{Pos}(S_j(u, F, \xi)) \geq \beta; j=1, 2, 3 \right\}. \quad (14)$$

Основною процедурою в реалізації моделі (14) є обчислення можливості [14]. Під нечітким моделюванням тут розуміється процес виконання наступних етапів дослідження: фаззифікації, аналіз (або оптимізація) і дефаззифікація. Сутність першого етапу полягає в моделюванні нечітко заданих вихідних даних в термінах теорії нечітких множин (ТНМ). Тут вводиться в розгляд так звана функція належності  $\mu(x)$ ;  $0 \leq \mu(x) \leq 1$ . При розв'язанні практичних задач вона дається поза ТНМ. Другий етап моделювання полягає у встановленні відповідності між нечіткими даними і простором відображення результатів. Цей етап виконується на основі рівневого підходу ТНМ, аналітичних, обчислювальних методів і комп'ютерних комплексів. На третьому етапі - дефаззифікації - виконується процес перетворення отриманих нечітких результатів до детермінованих.

### 5.1. Алгоритм

Виходячи з визначеної нижньої оцінки  $\beta_j$ ,  $j=1, 2, 3$ ; можливості  $\text{Pos}(S_j(u, F, \xi))$  виконання події  $S_j$ , визначимо  $\beta$ -рівневу множину  $Q_i$  нечітких величин  $\xi_i(a_i, m_i, b_i)$  як

$$Q_i(\beta) = [X_{L_i}(\beta), X_{R_i}(\beta)]; \quad i=1, 2, \dots, r, \quad X_{R_i} \geq X_{L_i}, \quad (15)$$

де  $X_{L_i}$ ,  $X_{R_i}$  результат розв'язання рівняння  $\beta = \mu(x)$ . Трійка параметрів  $a_i, m_i, b_i$  є характеристика нечіткої гранули, яка задається.

Так, наприклад, для нечіткої величини  $\xi$  з функцією належності трикутного виду

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{для } a \leq x \leq m \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{для } m < x \leq b \\ 0, & \text{для інших } x; \end{cases} \quad (16)$$

$$X_{L_i}(\beta) = \beta m_i + (1 - \beta)a_i; \quad X_{R_i}(\beta) = \beta m_i + (1 - \beta)b_i; \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (17)$$

Для функції належності виду

$$\mu(x) = e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \quad (\text{гаусова функція}) \quad (18)$$

маємо

$$X_{L_i}(\beta) = m_i - k; \quad X_{R_i}(\beta) = m_i + k; \quad k = \sigma_i \sqrt{-2 \ln \beta}, \quad (19)$$

де  $m_i, \sigma_i$  – параметри інформаційної гранули.

Сформулюємо наступні кроки алгоритму оптимізації:

1. Побудувати множину  $Q$ , яка включає в себе  $\beta$  – рівневі підмножини  $Q_i(\beta)$ ;  $i = 1, 2, \dots, r$ ,  $Q = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_r$ .

2. Випадковим чином отримати в множині  $Q$  вектор  $v$ , компоненти якого обчислюються згідно:  $v_i = x_{L_i} + (x_{R_i} - x_{L_i})\zeta$ ;  $\zeta \in [0, 1]$ ;

$v = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$  - величина, розподілена за рівномірним законом.

3. Обчислити  $U = \max(U, s)$ ;  $G = \min(G, q)$ , де  $s = \min_j(g_j(u, v))$ ;  $q = \max_j(g_j(u, v))$ ;  $j = 1, 2, 3$ . Початкові значення  $U$  і  $G$  призначаються як  $U = -\infty$ ;  $G = +\infty$ .

4. Повторити  $N$  разів етапи 2-3, де  $N$  – ціле число випробувань, досить велике.

В результаті буде отримано  $F_L^*(\beta) = U$ ;  $F_R^*(\beta) = G$ ; для  $0 \leq \beta \leq 1$ .

Визначення [14]. Нехай  $F_f$  - нечітка величина і  $\alpha \in (0, 1]$ .

Тоді

1)  $F_{\text{sup}}(\alpha) = \sup\{F_f | \text{Pos}(g_j) \geq F_f\} \geq \alpha$ ;  $j = 1, 2, 3$  називається  $\alpha$  – оптимістичним значенням сили  $F_f$ . Воно являє собою найбільшу верхню межу, можливість досягнення якої для  $F_f$  становить  $\alpha$ .

2)  $F_{\text{inf}}(\alpha) = \inf\{F_f | \text{Pos}(g_j) \leq F_f\} \geq \alpha$ ;  $j = 1, 2, 3$  називається  $\alpha$  – песимістичним значенням сили  $F_f$ . Воно представляє собою найменшу нижню межу, можливість досягнення якої для  $F_f$  становить  $\alpha$ .

Відповідно до цих визначень маємо, що  $F_R^*$  - це  $\beta$  -оптимістичне значення, а  $F_L^*$  - це  $\beta$  -песимістичне значення для величини  $F_{\text{fuzzy}}^*(\beta)$ .

Зауваження. При  $\beta \rightarrow 1$  має місце  $F_L^*(\beta) \rightarrow F_{\text{det}}^*$ ;  $F_R^*(\beta) \rightarrow F_{\text{det}}^*$ .

## 5.2. Чисельні приклади

А. Нехай нечіткими будуть величини модуль пружності і межа міцності, тобто  $\xi_1 = E$  і  $\xi_2 = \sigma_0$ , а функція належності їх описується в вигляді (16).

Таблиця 3

Вихідні дані і результати експериментів

$$m_E = 35 \text{ GPa}; m_{\sigma_0} = 0.4 \text{ GPa}; \Delta_{\sigma_0} = 0.005 \text{ GPa}; a_E = m_E - \Delta_E;$$

$$b_E = m_E + \Delta_E; a_\sigma = m_\sigma - \Delta_\sigma; b_\sigma = m_\sigma + \Delta_\sigma; h = 0,1 \text{ см}; R = 10 \text{ см};$$

$$L = 30 \text{ см}; \theta = 0,75.$$

№ ек-та.	1	2	3	4
$\Delta_E, \text{GPa}$	3	1	0.5	0.1
$F_L^*(\beta)$	$4.71\beta + 50.27$	$1.57\beta + 53.41$	$0.79\beta + 54.19$	$0.16\beta + 54.82$
$F_R^*(\beta)$	$-4.71\beta + 59.69$	$-1.57\beta + 56.55$	$-0.79\beta + 55.77$	$-0.16\beta + 55.14$
%	8,6	2,9	1,4	0,3

Відповідно до запропонованого алгоритму виконано чотири експерименти, вихідні характеристики і результати яких наведені в таблиці 3 і на рис. 3. У графі % таблиці 3 наведені відносні оцінки відхилення розв'язку  $F_{fuzzy}^*(0)$  від величини  $F_{det}^*$ . Вони є такими ж, як і відхилення параметра  $\Delta_E$  (у %) (табл. 2).

$F^*(1), \text{кН}$

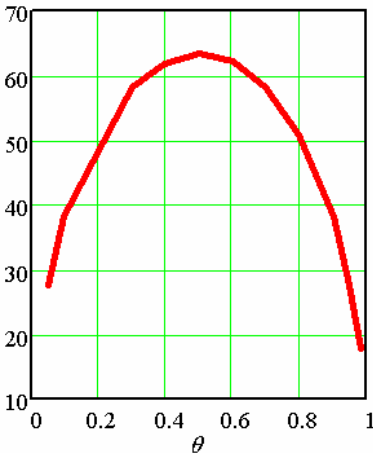


Рис. 4. Залежність  $F_{fuzzy}^*(1)$  від параметра  $\theta$

Б. Для нечітко заданих  $E$  і  $\sigma_0$  з функцією належності гаусова виду (18), в якій прийнято  $\Delta_E = 0,1 \text{ GPa}$ ;  $m_E = 35 \text{ GPa}$ ; і  $\Delta_{\sigma_0} = 0.005 \text{ GPa}$ ;  $m_{\sigma_0} = 0.4 \text{ GPa}$ . Проведено дослідження впливу параметра  $\theta$  на величину сили  $F_{fuzzy}^*(1)$  (рис. 4), з якого видно, що найбільше значення величини  $F_{fuzzy}^*(1) = 63,5 \text{ кН}$  досягається при  $\theta = 0,5$ .

В. При значеннях вихідних незмінних параметрів  $E = 35 \text{ GPa}$ ;  $\sigma_0 = 0.4 \text{ GPa}$ ;  $L = 30 \text{ см}$  виконано обчислення максимальної сили  $F_{fuzzy}^*(F_L^*, F_R^*)$  в припущенні, що



величини  $h$ ,  $R$ ,  $\theta$  будуть нечітко заданими. Нехай функція належності для цих трьох параметрів буде задана в вигляді (16). Вихідні дані про нечіткі величини  $\xi(a, m, b)$  і результат обчислень представлений в таблиці 4.

Таблиця 4

Дані про нечіткі величини  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{\theta}$  і результати обчислення  $F_{fuzzy}^*(0)$

№	$\tilde{h}$	$\tilde{R}$	$\tilde{\theta}$	$F_L^*(0)$ , кН	$F_R^*(0)$ , кН	%
1	$h(0.09, 0.1, 0.11)$	$R(9.5, 10, 10.5)$	$\theta(0.705, 0.75, 0.8)$	41,1	70,4	28
2	$h(0.09, 0.1, 0.11)$	$R(9.5, 10, 10.5)$	$\theta(0.745, 0.75, 0.755)$	44,2	67	22
3	$h(0.095, 0.1, 0.105)$	$R(9.9, 10, 10.1)$	$\theta(0.74, 0.75, 0.76)$	48,4	61,4	12
4	$h(0.099, 0.1, 0.101)$	$R(9.9, 10, 10.1)$	$\theta(0.695, 0.75, 0.755)$	53,5	56,5	3

Як видно з таблиці 4, наприклад, для експериментів 1 і 4 відхилення  $\Delta$  від модальних значень  $m_h, m_R, m_\theta$  складають: 1)  $\Delta_h = 10\%; \Delta_R = 5\%; \Delta_\theta = 6.7\%$ ; 2)  $\Delta_h = 1\%; \Delta_R = 1\%; \Delta_\theta = 0.7\%$ .

Найбільші відхилення результату  $F_{fuzzy}^*$  від  $F_{det}^*$  відповідно дорівнюють: 1) 28%; 2) 3%, тобто не дуже грубі дані першого експерименту спричиняють грубий результат. У четвертому експерименті прийнятні помилки в даних дають також прийнятний результат.

## 6. Підхід до задачі з позиції неточних множин

### 6.1. Визначення та алгоритм

Припустимо, що компоненти вектора  $\xi$  є неточними величинами, які задаються у вигляді

$$\xi_i([a_i, b_i], [c_i, d_i]), \quad (22)$$

причому  $c_i \leq a_i \leq b_i \leq d_i$ ;  $i = 1, 2, 3$ . При  $c_i = a_i$ ;  $b_i = d_i$  отримують інтервальну величину [17].

Відповідно до теорії неточних множин [8, 14] неточна величина представляє собою вимірну функцію з так званого простору наближень в дійсну пряму. Цей простір складається з двох непустих, чітких множин  $\Lambda$  і  $\Delta$ . Вони породжуються відношенням еквівалентності: рефлексивності (подібності), симетричності, транзитивності і відповідно називаються верхнім і нижнім наближенням (рис. 5), тобто  $\Lambda = \{x | c \leq x \leq d\}$  і  $\Delta = \{x | a \leq x \leq b\}$ ;  $\xi(x) = x$ ;  $\forall x \in \Lambda$ .

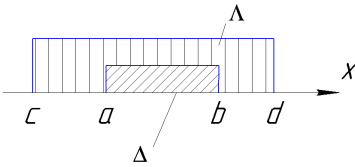


Рис. 5. До визначення неточної величини  $\xi$

Передбачається, що всі елементи множин  $\Lambda$ ,  $\Delta$  можуть з'явитися з рівною можливістю. Мірою  $\pi$  цих множин, відповідно  $[a_i, b_i], [c_i, d_i]$ , є їх довжина (потужність континууму).

Невизначена подія  $S_j(u, \xi)$  у випадку наявності неточних величин  $\xi$  є неточна. Мірою неточності виконання цієї події є довіра  $Tr(S_j)$ ;  $j = 1, 2, 3$ . Задача (10) визначення величини сили стиснення  $F^*$  циліндричної оболонки в цьому випадку описується таким чином:

$$F^* = \arg \left\{ \max F \mid Tr(g_j(u, \xi) \geq F) \geq \beta; j = 1, 2, 3 \right\}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

Міра довіри для неточних подій  $f(\xi) = F - g_j(u, \xi) \leq 0$ ;  $j = 1, 2, 3$  в теорії неточних множин визначається як [14]

$$Tr(f(x) \leq 0) = \frac{1}{2} (Tr^{\bar{}}(f(\xi) \leq 0) + Tr^{\underline{}}(f(\xi) \leq 0)),$$

де

$$Tr^{\bar{}}(f(\xi) \leq 0) = \frac{\pi(x \in \Lambda \mid f(\xi) \leq 0)}{\pi(\Lambda)}, \quad Tr^{\underline{}}(f(\xi) \leq 0) = \frac{\pi(x \in \Delta \mid f(\xi) \leq 0)}{\pi(\Delta)}.$$

Обчислюється  $Tr(f(x) \leq 0)$  наступним чином:

1. Випадковим чином робиться вибірка  $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_N$ , із  $\Delta$  і  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_N$ , із  $\Lambda$  згідно мірі  $\pi$ .

2. Для будь-якого  $v \in [F^-, F^+]$  відшукується  $\underline{N}(v)$ , яке означає число  $\underline{x}_i$ , що задовольняє умові  $v - g_j(u, \xi(\underline{x}_i)) \leq 0$  для  $j = 1, 2, 3$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$ , а  $\bar{N}(v)$  означає число  $\bar{x}_i$ , що задовольняє умові  $v - g_j(u, \xi(\bar{x}_i)) \leq 0$  для  $i = 1, 2, 3$ ;  $j = 1, 2, \dots, N$ . Величини  $F^-$ ,  $F^+$  - задаються як границі інтервалу можливого значення сили  $F^*$ .

Серед чисел отриманої послідовності  $\{v\}$  вибирається таке число  $v$ , яке задовольняє умові

$$v^* = \arg \left\{ \max_v \left| \frac{\underline{N}(v) + \bar{N}(v)}{2N} \geq \beta \right. \right\}.$$

Значення  $v^*$  при цьому є шуканою оцінкою  $F_{rough}^*$ .

## 6.2. Чисельний приклад

При даних  $E = 35 \text{ GPa}$ ,  $\sigma_0 = 0.4 \text{ GPa}$ ,  $L = 30 \text{ см}$  і вихідних параметрах опису неточних величин  $\xi(a, b, c, d)$ , заданих у таблиці 5 проведені чотири чисельних експерименту при наступних детермінованих даних:  $h = 0.01$ ;  $R = 10$ ;  $\theta = 0.75$ ;  $F^- = 30 \text{ кН}$ ;  $F^+ = 120 \text{ кН}$ ;  $N = 5 \cdot 10^3$ .

Таблиця 5

Вихідна інформація про неточні вихідні дані

№ екс-ту	Неточні параметри	$a$	%	$b$	%	$c$	%	$d$	%
1	$h$	0,08	20	0,12	20	0,05	50	0,15	50
	$R$	9,5	5	10,8	8	8	20	11	10
	$\theta$	0,72	4	0,76	1,3	0,7	6,7	0,8	6,7
2	$h$	0,095	5	0,102	2	0,094	6	0,105	5
	$R$	9,95	0,5	10,06	0,6	9,99	0,1	10,08	0,8
	$\theta$	0,745	0,7	0,752	0,3	0,74	13,3	0,755	0,7
3	$h$	0,09	10	0,104	4	0,088	12	0,11	10
	$R$	9,9	1	10,12	1,2	9,86	1,4	10,16	1,6
	$\theta$	0,74	1,3	0,754	0,5	0,73	2,7	0,76	1,3
4	$h$	0,099	1	0,101	1	0,097	3	0,103	3
	$R$	9,975	0,25	10,03	0,3	9,965	0,35	10,04	0,4
	$\theta$	0,7475	0,3	0,751	0,13	0,745	0,7	0,7525	0,3

У графі % наводиться відносно відхилення параметрів  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  (в %) від точних  $h$ ,  $R$ ,  $\theta$ .

Результати цих експериментів відображені у таблиці 6. За даними таблиці побудовані графіки (рис. 5) впливу рівня  $\beta$  на величину критичної сили  $F^*(\beta)$  - збільшення рівня довіри веде до розв'язання, отриманого при точних даних ( $F_{\text{det}}^* = 54.98 \text{ кН}$ ).

Таблиця 6

Значення критичної сили  $F_{\text{rough}}^*(\beta)$ ;  $0 < \beta \leq 1$  в чотирьох експериментах при неточних даних

$\beta$ / № екс-ту	Значення $F_{\text{rough}}^*$ , кН			
	1	2	3	4
0,05	-	60,18	65,27	57,96
0,1	-	59,20	63,29	57,51

0,2	79,44	57,10	59,59	56,25
0,3	72,19	56,22	57,43	55,84
0,4	66,52	55,31	55,90	55,49
0,5	59,32	54,37	54,90	55,17
0,6	54,31	53,51	52,72	54,81
0,7	47,32	52,58	50,37	54,55
0,8	41,55	51,53	48,49	54,21
0,9	35,78	50,68	46,37	53,55
1	15,6	49	43,54	51,92
відхилення $F_{rough}^*$ від $F_{det}^*$ (%). Авторська експертна оцінка	71,6 Дуже грубий розв'язок	10,7 Прийнятний розв'язок	20,7 Грубий розв'язок	5,6 Добрий розв'язок

За даними таблиці 6 побудовані графіки (рис. 6) зміни величини сили  $F_{rough}^*$  від рівня довіри  $\beta$ . Врахування неточності початкових даних призводить до отримання, як і очікувалося, неточного результату. Так, наприклад, у другому експерименті максимальна неточність для  $h$  становила 6%, для  $R$  - 0,7%, для  $\theta$  - 13%. Отриманий при цьому результат  $F_{rough}^*(1) = 49 \text{ кН}$  відрізняється від детермінованого

( $F_{det}^* = 55 \text{ кН}$ ) на 10,7%. На рисунку 6 представлено графічне зображення функції  $F_{rough}^*(\beta)$  від рівня довіри для чотирьох експериментів, інформація про вихідні дані яких задана в таблиці 6. Характер поведінки кривих  $F_{rough}^*$  тут майже такий же, як і для  $F_{rand}^*$  (рис. 2). Тобто зі збільшенням рівня довіри ( $0.5 < \beta < 1$ ) до виконання неточної події є зменшення величини сили  $F_{rough}^*$  (оптимістична оцінка). Зменшення ж рівня

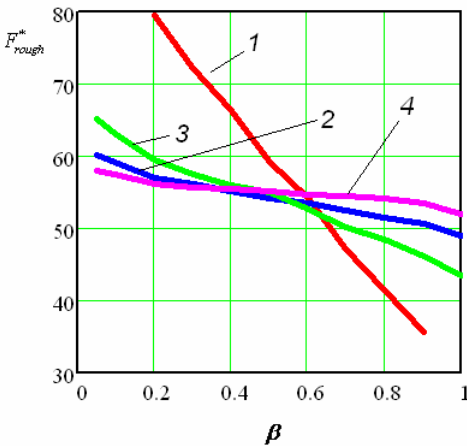


Рис. 6. Зміна величини сили  $F_{rough}^*$  від рівня довіри  $\beta$  (1, 2, 3, 4 – номери експериментів)

довіри ( $0 < \beta < 0.5$ ) призводить до збільшення значень  $F_{rough}^*$  (песимістична оцінка). А збіжність значень  $F_{rough}^*$  до  $F_{det}^*$  відбувається за рахунок зменшення "розмірів" нижнього і верхнього наближень.

### 6.3. Задача з інтервальними числами

Покладемо, що у визначенні неточного числа  $\xi([a, b]; [c, d])$ ;  $c \leq a \leq b \leq d$  може бути  $c = a$  і  $d = b$  (випадок А) або  $a = c; b = d$  (випадок В). Тоді має місце так зване інтервальне число [17]. В рамках визначення неточного числа маємо  $\xi[a, b] = \xi([a, b]; [a, b])$ ;  $a \leq x \leq b$ ; (випадок А) або  $\xi[c, d] = \xi([c, d]; [c, d])$ ;  $c \leq x \leq d$ ; (випадок В). Скориставшись процедурою обчислення критичної сили для неточних чисел, визначимо значення  $F_{interval}^*(1)$  у випадку інтервальних значень  $\tilde{h}$ ,  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{\theta}$ .

Інтерпретуючи результати розрахунку для даних другого експерименту (табл. 6), робимо наступний висновок: «стискаючи» зовнішнє наближення до внутрішнього (випадок А), отримуємо  $F_{interval}^*(1) = 48.40 \text{ кН}$ , що на 1.2% менше від величини  $F_{rough}^*(1) = 49 \text{ кН}$ ; «розтягуючи» внутрішнє наближення у визначенні неточного числа, до зовнішнього (випадок В), отримуємо  $F_{interval}^*(1) = 49.68 \text{ кН}$ , що на 1.4% більше від величини  $F_{rough}^*(1) = 49 \text{ кН}$ , тобто результат у випадку В «грубіше», ніж результат, отриманий у випадку А. Таким чином, метод, що описує неточні множини, дає меншу помилку, ніж при підході до оптимізаційної задачі з позицій інтервальних чисел.

### Висновки

1. На прикладі задачі нелінійної оптимізації - визначення максимального значення осьової сили, що стискає ортотропну оболонку, яка знаходиться в умовах трьох граничних станів (по міцності і стійкості) і завдання деяких параметрів невизначеної природи (випадкової, нечіткою, неточної, інтервальної), показана принципова можливість застосування сучасних методів математики м'яких обчислень - імітаційного, нечіткого, неточного моделювання.

2. На основі методу Монте-Карло та впровадження мір невизначеності - ймовірності, можливості, довіри розроблено чисельні процедури обчислення максимального значення осьової сили, що стискає циліндричну оболонку.

3. Проведення числових експериментів показало, що врахування грубості вихідних даних тієї чи іншої невизначеності, природно, веде так само до грубих результатів. Були отримані оцінки грубості шуканої сили шляхом порівняння з розв'язанням задачі при точних даних.

4. Описані тут підходи з уведенням відповідних експертних оцінок щодо грубості значень параметрів дозволяють проаналізувати границі «терпимості» проєктованої системи до можливих помилок в завданні вихідних даних випадкового характеру, нечіткого і неточного опису.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баничук Н.В.* Введение в оптимизацию конструкций.- М.: Наука. - 1986.- 302 с.
2. *Аугустини Г., Баратта А., Кошиати Ф.* Вероятностные методы в строительном проектировании, М.: Стройиздат.-1988.-584 с.
3. *Banichuk N.V., Neittaanmaki P.J.* Structural Optimization with Uncertainties Springer Science + Business Media B.V..- Dordrecht Heidelberg London New York 2010. - p. 233.
4. *Banichuk N.V., Neittaanmaki P.J.* On structural optimization with incomplete information // Mechanics Based Design of Structures and Machines. V.35, № 1 - 2007. - p. 76 - 95.
5. *Zadeh L.* Fuzzy sets . Information and Control, 8. - 1965 p. 338 - 353.
6. *Кофман А.* Введение в теорию нечётких множеств.- М.: Радио и связь.- 1982.-432 с.
7. *Дюбуа Д. Прад А.,* Теория возможностей: Приложение к представлению знаний в информатике. -М.: Радио и связь.-1990 -288 с.
8. *Pawlak Z.* Rough sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,- 1991. - p. 224.
9. *Baranenko V., Vojnakov A.* Optimal structural design at random and fuzzy information about loading. In Theoretical Foundation of Civil Engineering – XV, W.Szczesnik, ed. OW PW, Warsaw, 2007. - p. 25-32.
10. *Бараненко В.А.* Нечёткая оптимизация в проектировании конструкций//Прикладная математика и механика/Труды Грузинского технического университета,-Тбилиси.- 2012.-с.113 – 120.
11. *Тетерс Г.А., Рикардс Р.Б., Нарусберг В.Л.* Оптимизация оболочек из слоистых материалов - Рига: Зинатне.– 1978.- 240 с.
12. *Рикардс Р.Б.,Тетерс Г.А.,*Устойчивость оболочек из композитных материалов - Рига: Зинатне.– 1974.- 312 с.
13. *Рикардс Р.Б.* Двойственная задача оптимизации ортотропной цилиндрической оболочки – Механика полимеров.- 1973.- № 5.- с.865 -871.
14. *Liu Baoding* Theory and Practice of Uncertain Programming. Physica-Verlag Springer – Verlag Company Heidelberg . 2002. - p. 416.
15. *Соболь И.М.* Численные методы Монте-Карло. – М.: Физматлит. - 1973.-311 с.
16. *Растрингин Л. А.* Статистические методы поиска.- М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. лит. - 1968.- 376 с.
17. *Шокин Ю.И.* Интервальный анализ -Наука - Сибир. Отд. АН – Новосибирск. - 1981. - 111 с

#### REFERENCES

1. *Banichuk N.V.* Vvedenie v optimizatsiyu konstruksiy (Introduction to Structural Optimization).- М.: Nauka. - 1986.- 302 p.

2. *Augusti G., Baratta A., Koshiati F.* Veroyatnostnyie metodyi v stroitelnom proektirovani (Probabilistic methods in construction design), M.: Stroyizdat.-1988.-584 p.
3. *Banichuk N.V., Neittaanimaki P.J.* Structural Optimization wih Uncertainties Springer Science + Business Media B.V..- Dordrecht Heidelberg London New York 2010. - p. 233.
4. *Banichuk N.V., Neittaanimaki P.J.* On structural optimization with incomplete information // Mechanics Based Design of Structures and Machines. V.35, № 1 - 2007. - p. 76 - 95.
5. *Zadeh L.* Fuzzy sets. Information and Control, 8.- 1965 p. 338 - 353.
6. *Kofman A.* Vvedenie v teoriyu nechyotkih mnozhestv (Introduction to the theory of fuzzy sets).- M.: Radio i svyaz.- 1982.-432 p.
7. *Dyubua D. Prad A.* Teoriya vozmozhnostey: Prilozhenie k predstavleniyu znaniy v informatike (Theory of possibilities: Application to knowledge representation in computer science). -M.: Radio i svyaz.-1990 -288 s.
8. *Pawlak Z.* Rough sets: Theoretical Aspects of Reasoning about Data. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht,- 1991. - p. 224.
9. *Baranenko V., Vojnakov A.* Optimal structural design at random and fuzzy information about loading. In Theoretical Foundation of Civil Engineering – XV, W.Szczesnik, ed. OW PW, Warsaw, 2007. - p. 25-32.
10. *Baranenko V.A.* Nechyotkaya optimizatsiya v proektirovanii konstruksiy (Fuzzy optimization in the design of structures) // Prikladnaya matematika i mehanika/Trudy Gruzinskogo tehnikeskogo universiteta,-Tbilisi.-2012.- p.113 – 120.
11. *Teters G.A., Rikards R.B., Narusberg V.L.* Optimizatsiya obolochek iz sloistyih materialov (Optimization of shells made of laminated materials) - Riga: Zinatne.– 1978.- 240 s.
12. *Rikards R.B.,Teters G.A.* Ustoychivost obolochek iz kompozitnyih materialov (Stability of shells made of composite materials) - Riga: Zinatne.– 1974.- 312 s.
13. *Rikards R.B.* Dvoystvennaya zadacha optimizatsii ortotropnoy tsilindricheskoy obolochki (The dual problem of optimization of an orthotropic cylindrical shell)– *Mehanika polimerov.- 1973.- # 5.- s.865 -871.*
14. *Liu Baoding* Theory and Practice of Uncertain Programming. Physica-Verlag Springer – Verlag Company Heidelberg . 2002. - p. 416.
15. *Sobol I.M.* Chislennyye metodyi Monte-Karlo (Numerical Monte Carlo methods). – M.: Fizmatlit. - 1973.-311 p.
16. *Rastrigin L. A.* Statisticheskie metodyi poiska (Statistical methods of search).- M.: Nauka. Gl. red. Fiz.-mat. lit. - 1968. - 376 p.
17. *Shokin Yu.I.* Intervalnyiy analiz (Interval Analysis) -Nauka - Sibir. Otd. AN – Novosibirsk. - 1981. - 111 p.

*Baranenko V.A., Volchok D.L.*

#### **METHODS OF SOFT CALCULATIONS FOR OPTIMUM DESIGN OF ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELLS IN CONDITIONS OF RANDOMLY FUZZY AND ROUGH INFORMATION**

In this paper we consider the problem of determining the maximum value of the compressive force of a compressed orthotropic cylindrical shell while simultaneously meeting the conditions of three limiting states (strength, general and local loss of stability) under complete and incomplete information. The shell is made of fiberglass reinforced in two mutually perpendicular directions, which coincide with the axial and circumferential directions. The shell has swing joints at the ends.

Realization of the problem was provided with Monte Carlo method. Two experiments for deterministic problem show that the method has convergence and can be used as a basic method for different experiments with uncertain information in initial data. To make optimal problem with uncertain information useable the measures such as probability, possibility and trust was involved.

The paper presents the results of the influence of the information granule characteristics of the uncertainty on optimal solutions. An algorithm to implement the optimization models is developed. Numerical examples are given.

The approaches described here with the introduction of appropriate expert estimations of the uncertainty of the parameter values allow us to analyze the boundaries of the "tolerance" of the projected system with possible errors of initial data. Also for uncertain data of a random character, fuzzy and rough description we can estimate influence intensity of different uncertainties on final result of calculation. Special case of rough information such as interval numbers is considered. On the base of proposed problems and theirs calculations we are able to estimate the most dangerous kind of uncertainty on expected result for different levels of probability, possibility and trust.

**Keywords:** cylindrical reinforced shell, fuzzy values, rough values, random values, information granule, the optimal design of structures.

*Бараненко В.А., Волчок Д.Л.*

### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАКСИМАЛЬНОГО ЗНАЧЕНИЯ НАГРУЗКИ СЖАТОЙ ОРТОТРОПНОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ СЛУЧАЙНОЙ НЕЧЕТКОЙ И НЕТОЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ**

В данной работе рассматривается задача определения максимального значения сжимающей силы сжатой ортотропной цилиндрической оболочки при одновременном выполнении условий трех предельных состояний (прочности, общей и местной потери устойчивости) в условиях неполной информации. Оболочка выполнена из стеклопластика, армированного в двух взаимно перпендикулярных направлениях, которые совпадают с осевым и окружным направлениям. В работе приведены результаты влияния характеристик информационной гранулы той или иной неопределенности на оптимальные решения. Разработан алгоритм реализации поставленных оптимизационных моделей. Приведены числовые примеры.

**Ключевые слова:** цилиндрическая армированная оболочка, нечеткие величины, неточные величины, случайные величины, информационная гранула, оптимальное проектирование конструкций.

УДК 517.11+519.92+539.3

*Бараненко В.О., Волчок Д.Л.* **Визначення максимального значення навантаження стиснутої ортотропної оболонки в умовах випадкової, нечіткої і неточної інформації** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99. – С. 71 – 89.

*Розглянуто задачу визначення максимального значення осьової сили, яка стискує кругову циліндричну ортотропну оболонку за умов стійкості та міцності, при випадковому, нечіткому і неточному завданні вихідних даних.*

Табл. 6. Іл. 6. Бібліогр. 17 назв.

*Baranenko V.A., Volchok D.L.* **Calculation of the maximum load value of a compressed orthotropic shell under conditions of random, fuzzy and rough information** // Strength of material and theory of structures. – 2017. – Issue 99. – P. 71 – 89. – Ukr.

*The problem of calculation of axial force maximum value that compresses a circular cylindrical orthotropic shell under the conditions of stability and strength, with a random, fuzzy and rough initial data is considered.*



*Бараненко В.А., Волчок Д.Л. Определение максимального значения нагрузки сжатой ортотропной оболочки в условиях случайной, нечеткой и неточной информации // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вып. 99. – С. 71 – 89.*

*Рассмотрена задача определения максимального значения осевой силы, которая сжимает круговую цилиндрическую ортотропную оболочку в условиях устойчивости и прочности, при случайном, нечетком и неточном задании исходных данных.*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор БАРАНЕНКО Валерій Олексійович

**Адреса робоча:** 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а. ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», БАРАНЕНКО Валерій Олексійович.

**Адреса домашня:** 49005 Україна, м. Дніпро, вул. Писаржевського, 8а/70, Бараненко Валерій Олексійович

**Роб. тел.:** +38(056)7563422

**Мобільний тел.:** +38(066) 125-459-7

**E-mail:** baranenko1941@ukr.net

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, заступник декана факультету ПЦБ. ВОЛЧОК Денис Леонідович

**Адреса робоча:** 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а. ДВНЗ «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», ВОЛЧОК Денис Леонідович

**Адреса домашня:** 49094 Україна, м. Дніпро, вул. Мандриківська 149/60, ВОЛЧОК Денис Леонідович

**Роб. тел.:** +38(056)7563422

**Мобільний тел.:** +38(066) 727-656-0

**E-mail:** Denys.L.Volchok@gmail.com

UDC 539.3

## LYAPUNOV EXPONENTS ESTIMATION FOR STRONGLY NONLINEAR NONSMOOTH DISCONTINUOUS VIBROIMPACT SYSTEM

**V.A. Bazhenov,**

Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician of the National Academy of Pedagogical Sciences of the Ukraine

**O.S. Pogorelova,**

Candidate of Physico-mathematical Sciences, Senior Research Officer, Senior Research Officer

**T.G. Postnikova,**

Candidate of Engineering Sciences, Senior Research Officer, Senior Research Officer

*Kyiv National University of Construction and Architecture  
Povitrofloitsky ave., 31, Kyiv, 03680*

Lyapunov exponents are ones of the most important characteristics for the definition of the dynamical system state. Their estimation for nonsmooth discontinuous system that is vibroimpact system has got certain difficulties. We study their calculation by following the evolution of two nearby orbits in phase space and use three formulas for such estimation. We check this calculation for three different oscillatory regimes: periodic, quasi-periodic and chaotic. We also define the largest Lyapunov exponent by Benettin's algorithm and compare obtained results.

**Keywords:** nonsmooth dynamic system, Lyapunov exponent, nearby orbits, Benettin's algorithm.

### 1. Introduction

There is famous book "Chaotic vibrations" by F. Moon [1]. In preface the author writes:

"Had anyone predicted that new discoveries would be made in dynamics three hundred years after publication of Newton's Principia, they would have been thought naïve or foolish. Yet in the last decade new phenomena have been observed in all areas of nonlinear dynamics, principal among these being chaotic vibrations. Chaotic oscillations are the emergence of random like motions from completely deterministic systems".

This discovery essence is that completely determined (deterministic) dynamic system begins to behave by unforeseen chaotic manner when any accidental influence is absent. However, in this unpredictability (chaoticity) it is possible to identify a number of regularities in the system behavior which distinguishes this phenomenon from the classical random processes. Moreover, in contrast to the classical random processes, the phenomena of deterministic chaos can be reproduced in natural, laboratory and numerical experiments. Just deterministic chaos is not an exceptional mode of dynamical systems behavior; on the contrary, such regimes are observed in many dynamical systems in mathematics, physics, chemistry, biology and medicine. Such deterministic

chaotic modes are more typical modes than fully predictable (regular) modes. Recently such phenomena are more often described in studies on economics, sociology, philosophy, history. Therefore, the studying of chaotic dynamics is one of the main ways of modern natural science development.

The phenomena of deterministic chaos are possible one only in nonlinear systems.

Therefore the earlier illusions about the possibility of real processes adequate description were dispersed when deterministic chaos was discovered. So the nonlinear dynamics methods are gaining extraordinary weight in modern scientific researches.

Vibroimpact systems (VIS) are strongly nonlinear ones. The right-hand sides of the differential equations describing their movement are discontinuous due the repeated impacts between their elements. Periodic regular regimes can lose stability when system parameters or external influence parameters are changing. Then other modes are arising: quasi-periodic, chaotic, and regimes with great period and with a large number of impacts per cycle – so-called chatter or rattle.

The technique of regular modes studying is well designed; there are a large number of articles and monographs about it (for example, [2-6]). The methodology and the theory of irregular regimes occurrence in nonlinear smooth systems also exist (for example, [7-12]). Also there are some investigations about nonlinear nonsmooth systems (for example, [13-20]). But today there are many unexplored and unknown in such systems.

Vibroimpact systems are exactly such systems - strongly nonlinear, non-smooth, with a discontinuous right-hand side. The investigation of their behavior when both the system parameters and the external influence parameters are changing is of great interest and importance. Vibroimpact systems are just such systems where strong nonlinearity caused by the repeated impacts. Their dynamic behavior studying contains many difficulties because chaotic movements are being implemented in them except regular behavior. It requires an analysis in the field of bifurcation and chaos theory. Bifurcation analysis of smooth systems is sufficiently studied. But the bifurcation analysis of nonsmooth systems with a discontinuous right-hand side in particular mechanical systems with impacts is studied insufficiently. This fact is emphasized by the analysis of world scientific literature.

In addition to the general significance of studying the dynamic behavior of a strongly nonlinear non-smooth vibroimpact system, it is also important to study the dynamic behavior of specific vibroimpact systems. For example, a vibroimpact platform that is widely used in the building industry for concrete mix compaction and concrete products forming [21]. Second example is vibroimpact system depicted at Fig. 1 where the attached body can play the role of percussive or non-percussive dynamic damper.

Thus the chaotic vibrations are the phenomena that are peculiar for nonlinear systems. More than that chaotic vibrations occur when some strong nonlinearity exists. Examples of nonlinearity in mechanical systems include the following:

- nonlinear elastic or spring elements;
- nonlinear damping such as friction;
- backlash, play, or limiters or bilinear springs;
- fluid-related forces;
- nonlinear boundary conditions.

In mechanical continua, nonlinear effects arise from a number of different sources which include the following:

- kinematics; for example, convective acceleration, Coriolis and centripetal accelerations;
- constitutive relations, for example, stress versus strain;
- boundary conditions, for example, free surfaces in fluids, deformation-dependent constraints;
- geometric nonlinearities associated with large deformation in structural solids such as beams, plates and shells.

For nonlinear problems with chaotic dynamics, the time history is sensitive to initial conditions, and precise knowledge of the future may not be possible even when the motion is periodic.

Now system routes to chaos are studying very attentively. But first of all we must know how discern the chaotic vibrations. Sometimes this task is not simple; it is difficult to distinguish such attractor from quasi-periodic or periodic with large period and with great number of impacts per cycle (chatter or rattle). There are some system characteristics that allow distinguishing the chaotic attractor – strange attractor. Ones of such characteristics are Lyapunov exponents in particular the largest Lyapunov exponent.

## 2. Lyapunov exponents

The tests for chaotic vibrations are qualitative and quantitative and “involve some judgment and experience on the part of the investigator” [1]. Quantitative tests for chaos are available and have been used with some success. One of the most widely used criteria is the Lyapunov exponent.

Chaos in deterministic systems implies a sensitive dependence on initial conditions. The Lyapunov exponent test measures exactly the sensitivity of the system to changes in initial conditions. Conceptually, one imagines a small ball of initial conditions in phase space and looks at its deformation into ellipsoid under the dynamics of the system. If  $d$  is the maximum length of the ellipsoid and  $d_0$  the initial size of the initial condition sphere, the Lyapunov exponent  $\lambda$  is interpreted by the equation

$$d(t) = d_0 e^{\lambda(t-t_0)}. \quad (1)$$

Here we can consider  $d_0$  as a measure of the initial distance between the two starting points, at a small but later time the distance is  $d$ .

In other words Lyapunov exponents for dynamic system with continuous time define the degree of distance or rapprochement for different but nearby trajectories at infinity that is the exponentially fast divergence or convergence of nearby orbits in phase space. This means that if two trajectories start close to one another in phase space, they will move exponentially away from each other for small times on the average.

If largest Lyapunov exponent is positive then the distance between initially nearby trajectories is increasing in the course of time. If it is negative then near trajectories is approaching each other some more, if it is zero then near trajectories are staying at the same distance approximately. Let us note that Lyapunov exponents may be different ones for different initial values. So one measurement is not sufficient and the calculation must be averaged over different regions of phase space. This average can be represented by

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{t_i - t_{0i}} \ln \frac{d_i}{d_{0i}}. \quad (2)$$

Lyapunov exponents may be obtained analytically extremely rarely. There are numerical methods which allow their obtaining with acceptable accuracy.

The calculation of largest Lyapunov exponent is especially important for diagnostic of complicated dynamics regimes. More than that it is enough very often to know the sign of largest Lyapunov exponent – the presence of positive largest exponent is one of the chaos criterion. There are three possibility for such calculation:

- we numerically integrate two copies of dynamic system with nearby initial conditions and follow the distance evolution between them;
- we jointly numerically integrate the main equations and equations in the variations;
- we determine Lyapunov exponents from time series.

The first method may be used when we have got some difficulties with obtaining or numerical solving the equation in variations [22-24]. The second method is the most used. There is famous algorithm by Benettin and all [25, 1, 24] and the special software for its realization. The third method is used when we have not the dynamical equations and must estimate Lyapunov exponents from an experimental time series [26].

We have got some difficulties under obtaining and numerical solving the equations in variations because our mechanical system (Fig. 1) is nonsmooth vibroimpact system with discontinuous right hand side. Therefore we attempted to use the first method.

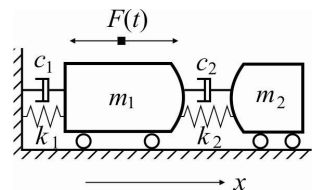


Fig. 1

It is necessary to note that now there are several propositions for Lyapunov exponents calculation for nonsmooth system. The authors of these propositions describe own methods for such estimation [27-38].

### 3. Lyapunov exponents estimation by following the evolution of two nearby orbits in phase space

We had investigated the dynamic behavior of mechanical vibroimpact system depicted at Fig. 1 in previous studying and had published many results [39]. Now we are studying the system behavior in narrow range of external frequency. We are observing the system route to chaos via destruction of invariant tour that is quasiperiodic regime with two incommensurate frequencies. Therefore we must determine whether oscillatory regime is chaotic one or not. We must estimate the largest Lyapunov exponent for this.

As we said above we'll try to estimate the largest Lyapunov exponent by the first method because we have got some difficulties with obtaining and numerical solving the equation in variations. These difficulties are caused by the nonsmoothness and discontinuity of differential equations right hand sides. We consider the vibroimpact system depicted at Fig. 1. The differential equations of its movement are:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 - \omega_1^2x_1 - 2\xi_2\omega_2\chi(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \\ &- \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) + \frac{1}{m_1}[F(t) - F_{con}(x_1 - x_2)], \\ \ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_3(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2(x_2 - x_1 - D) + \frac{1}{m_1}F_{con}(x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (3)$$

where  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ ;  $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$ ,  $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$ ;  $\chi = \frac{m_2}{m_1}$ .

External loading is periodic one:  $F(t) = P\cos(\omega t + \varphi_0)$ ,  $T = 2\pi/\omega$  is its period.

The term  $F_{con}$  is determined by formula (4):

$$\begin{aligned} F_{con}(z) &= K[H(z)z(t)]^{3/2}, \\ K &= \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}}, \\ \delta_1 &= \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \quad \delta_2 = \frac{1-\mu_2^2}{E_2\pi}, \end{aligned} \quad (4)$$

where  $z(t)$  is the relative closing in of bodies,  $z(t) = x_2 - x_1$ ,  $A$ ,  $B$ , and  $q$  are constants characterizing the local geometry of the contact zone;  $\mu_i$  and  $E_i$  are respectively Poisson's ratios and Young's modulus for both bodies,

The step Heviside function is discontinuous function:

$$H(z) = \begin{cases} 1, & z \geq 0 \\ 0, & z < 0. \end{cases} \quad (5)$$

Therefore its differentiation has got some difficulties. When we use the first method for the largest Lyapunov exponent calculation we integrate the motion equations (3) with two nearby initial conditions. Let us note by the way that we integrate these equations by the program ode23s (MATLAB® ODE solvers). This program integrates the systems stiff differential equations. So we obtain two nearby trajectories. We must follow their distance evolution. It may be fulfilled by the different three formulas. We introduce the following notations.

The coordinates of representing point in phase space for the first and the second trajectories are setting by the vectors  $\vec{X}(t), \vec{Y}(t)$  accordingly:

$$\vec{X}(x_1(t), x_2(t), \dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), x_3(t)). \quad (6)$$

The five coordinate is connected with transition from non autonomous problem to autonomous one and introducing the new variable  $x_3 = \omega t$ .

Then the initial conditions for two trajectories are  $\vec{X}(0), \vec{Y}(0)$ .

Three formulas for largest Lyapunov exponent  $\lambda$  are as follows:

a) We consider one trajectory piece and observe the changing of distance from  $d_0$  to  $d$  between two trajectories. Then

$$\lambda \approx \frac{1}{T} \ln \frac{d}{d_0}, \text{ where } d = \|\vec{X}(T) - \vec{Y}(T)\|, d_0 = \|\vec{X}(0) - \vec{Y}(0)\|, \quad (7)$$

$T$  – the trajectory piece length in time.

b) We consider  $M$  trajectory pieces of the same time length  $T$  and compare the distance between two trajectories at beginning and at the end of each piece. Then

$$\lambda \approx \frac{1}{MT} \sum_{i=1}^M \ln \frac{d_i}{d_{i-1}}, \text{ where } d_i = \|\vec{X}(iT) - \vec{Y}(iT)\|. \quad (8)$$

c) We consider  $M$  trajectory pieces of the same time length  $T$  and compare the distance between two trajectories at the end of each piece with initial distance. Then

$$\lambda \approx \frac{1}{MT} \sum_{i=1}^M \ln \frac{d_i}{d_0}, \text{ where } d_i = \|\vec{X}(iT) - \vec{Y}(iT)\|, d_0 = \|\vec{X}(0) - \vec{Y}(0)\|. \quad (9)$$

In spite of difficulties under obtaining and numerical solving the equations in variations we have succeeded to use the algorithm of Benettin and all [1, 24, 25] for comparing the obtained results. This algorithm is described in all textbooks, so we will not repeat its description. Note only the following.

When we calculate the largest Lyapunov exponent by Benettin's algorithm we follow the evolution of variations vector  $\vec{X}(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, x_3, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dot{\tilde{x}}_1, \dot{\tilde{x}}_2, \tilde{x}_3)$ .

The largest Lyapunov exponent is given as

$$\lambda \approx \frac{1}{MT} \sum_{i=1}^M \ln \|\tilde{x}_i\|. \quad (10)$$

If system of motion differential equations (1) is described in vector form as

$$\dot{x} = X(x), \quad (11)$$

then evolution of small excitement  $\tilde{x}(t)$  in linear approach is described by the equation:

$$\dot{\tilde{x}} = \mathbf{A}(t)\tilde{x}. \quad (12)$$

The matrix of equations in variations  $\mathbf{A}(t)$  for our vibroimpact system (Fig. 1 and formulas (3), (4)) have got the form:

$$\mathbf{A}(t) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_{35} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Here

$$a_{31} = -\omega_1^2 - \omega_2^2 \chi - \frac{1}{m_1} \frac{\partial F_{con}}{\partial x_1}, \quad a_{32} = \omega_2^2 \chi - \frac{1}{m_1} \frac{\partial F_{con}}{\partial x_2}, \quad a_{33} = -2\xi_1 \omega_1 - 2\xi_2 \omega_2 \chi,$$

$$a_{34} = 2\xi_2 \omega_2, \quad a_{35} = -\frac{P}{m_1} \sin(x_3 + \varphi_0), \quad a_{41} = \omega_2^2 + \frac{1}{m_2} \frac{\partial F_{con}}{\partial x_1},$$

$$a_{42} = -\omega_2^2 + \frac{1}{m_2} \frac{\partial F_{con}}{\partial x_2}, \quad a_{43} = 2\xi_2 \omega_2, \quad a_{44} = -2\xi_2 \omega_2.$$

According to formula (2)  $F_{con}(x_1 - x_2) = K \cdot (x_1 - x_2)^{\frac{3}{2}} \cdot H(x_1 - x_2)$ . Then

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{con}}{\partial x_1} &= K \cdot H(x_1 - x_2) \cdot \frac{3}{2} (x_1 - x_2)^{\frac{1}{2}}, \\ \frac{\partial F_{con}}{\partial x_2} &= -K \cdot H(x_1 - x_2) \cdot \frac{3}{2} (x_1 - x_2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

Since this really is a periodically driven oscillator, changes of distances in the phase space direction  $x_3 = \omega \cdot t$  are zero, as manifested by the row of zeroes in the matrix  $\mathbf{A}$  (13). Thus to find the largest Lyapunov exponent in this



problem one can work in the projection of the phase space  $(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2, x_3)$  onto the phase plane  $(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ , using the inner bracketed matrix in (13).

We see (5) that step Heviside function  $H(x_1 - x_2)$  is discontinuous one. Therefore under integration both initial equations (3) and equations in variations (12,13) we must take into attention zero and nonzero for this function.

#### 4. Numerical results

We have obtained the amplitude frequency response for vibroimpact system (Fig.1 and formulas (3), (4)) before [39,40]. Now we investigate the narrow frequency range and estimate the largest Lyapunov exponent for three oscillatory regimes – periodic, quasiperiodic and chaotic. Underline once more that it depends on initial conditions and may be found only after averaging of several results. We make conclusion about regime kind after the sign of Lyapunov exponent.

- a) Periodic regime with  $T$ -period and one impact per cycle ( $\omega = 7,40 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

The phase trajectories are attracted to closed curve, Poincare map – to one point. This regime is depicted at Fig.2. The initial points are shown at this Figure.

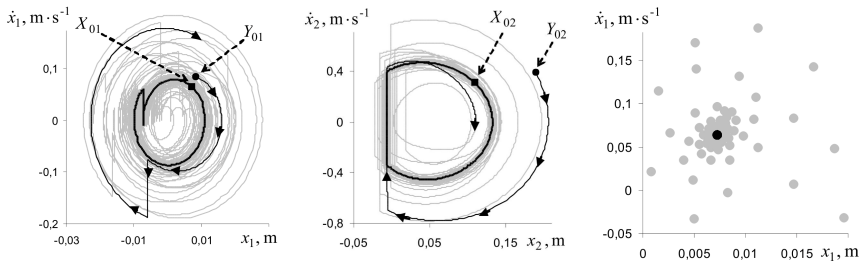


Fig. 2

We represent obtained results in Table 1.

Table 1

Number of intervals, $M$	Formula (7)	Formula (8)	Formula (9)	Benettin's algorithm (10)
100	-0,058	-0,058	-2,35	-0,038
500	-0,031	-0,043	-13,0	-0,061
1000	-0,017	-0,023	-17,4	-0,064
5000	-0,0034	-0,0038	-19,7	-0,066
10000	-0,015	-0,0017	-19,0	-0,067

The number of intervals  $M$  given in first column is used for Formulas (8),(9) and Benettin's algorithm. The interval length is the same in this formulas, it is  $T = 2\pi/\omega$ . In Formula (7) there is only one interval, its length is  $T = M \cdot 2\pi/\omega$ . This definition is the same one for quasiperiodic and chaotic regimes.

For periodic regime we can estimate the largest Lyapunov exponent by Floquet multiplier value as  $\lambda = \frac{1}{T} \ln|\rho|$ . This value is  $\lambda = -0,056$ .

What does speak this Table about?

Firstly we see rather big difference in Lyapunov exponent values in different Table cells. The strong dependence on initial conditions and calculating formulas explains this fact.

Secondly we see much unexpected result under calculation by Formula (9). This fact has got such explanation. The phase trajectories for periodic regime are attracted to closed curve therefore they become intimate to this curve shorter and shorter with time. So the distance  $d_i$  between two neighboring trajectories becomes smaller and smaller. Then  $\ln \frac{d_i}{d_0}$  becomes smaller and smaller too.

Thirdly all obtained Lyapunov exponents are negative ones. Exactly the sign of the largest Lyapunov exponent is important one because we make conclusion about the kind of oscillatory regime via this sign.

We can conclude that Lyapunov exponents estimation by following the evolution of two nearby orbits in phase space gives good result for periodic regime. Let us see how this method works for quasiperiodic regime.

b) Quasiperiodic regime ( $\omega = 7,46 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

This regime is depicted at Fig. 3. It is shown the phase trajectories and Poincare sections at this Figure.

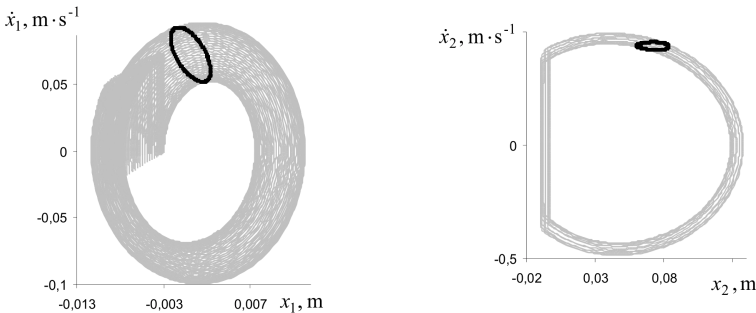


Fig. 3

We represent obtained results in Table 2. The calculations by Benettin's algorithm were made twice for two different initial conditions (I and II).

Table 2

Number of intervals, $M$	Formula (7)	Formula (8)	Formula (9)	Benettin's algorithm(10)	
				I	II
100		0,000243	0,024	0,022	0,019
500		3,81E-05	-0,015	-0,0050	-0,0037
1000		0,000243	-0,026	-0,0069	-0,0067
5000		3,46E-05	-0,035	-0,0089	-0,0089
10000	0,000243	2,76E-05	-0,036	-0,0091	-0,0091

The largest Lyapunov exponent for quasiperiodic regime must be equal to zero. Formula (9) gives the most bad result.

c) Chaotic regime ( $\omega = 7,92 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

This regime is depicted at Fig.4. It is shown the phase trajectories and Poincare sections at this Figure.

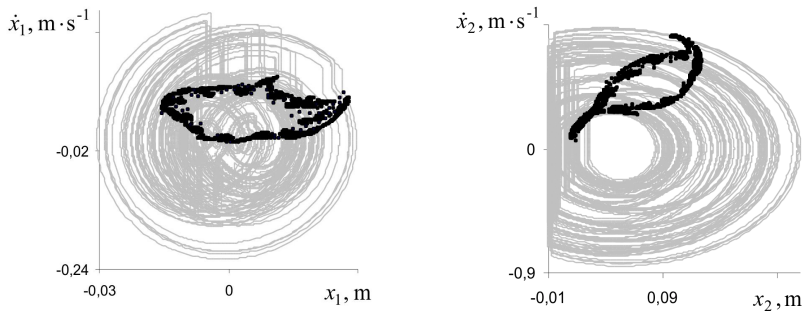


Fig. 4

We represent obtained results in Table 3. The calculations by Benettin's algorithm were made twice for two different initial conditions.

Table 3

Number of intervals, $M$	Formula (7)	Formula (8)	Formula (9)	Benettin's algorithm(10)	
				I	II
100		0,0106	-1,16	0,012	0,069
500		-0,0007	-0,73	0,0094	0,027
1000		8,6E-05	-0,70	0,014	0,018
5000		0,00016	-0,84	0,0060	0,014
10000	0,00018	0,00019	-1,64	0,0030	0,014

We see again the difference in results and bad values after Formula 9. It is importantly that the sign of the largest Lyapunov exponent is positive. Exactly positive sign characterizes the chaotic regime. The largest Lyapunov exponents estimated by Benettin's algorithm for two different initial conditions (two right columns in Table 3) are depicted at Fig. 5,a,b for clearness.

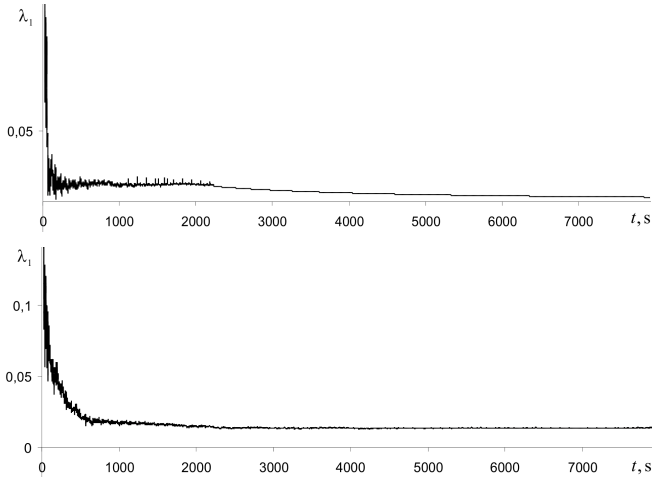


Fig. 5

The comparison of the largest Lyapunov exponents by Benettin's algorithm for different oscillatory regimes is shown at Fig. 6.

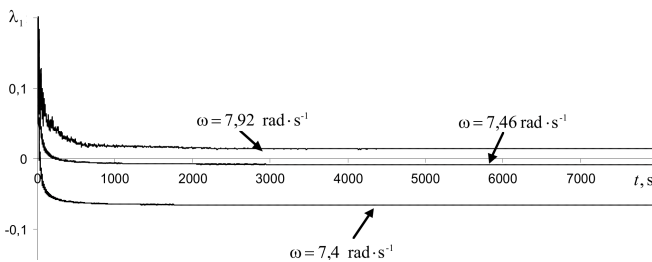


Fig. 6

### 3. Conclusions

- Lyapunov exponents estimation by following the evolution of two nearby orbits in phase space allows to obtain their values roughly and to determine their signs.

- The calculations after Formula 7 and 8 are preferable. Formula 9 is recommended in several textbooks. None the less it gives worse result and we don't recommend its using.

- We have succeeded to estimate the largest Lyapunov exponent for strongly nonlinear nonsmooth discontinuous vibroimpact system after Benettin's algorithm and have obtained well sufficiently reliable results.

#### REFERENCES

1. *Moon F.C.* Chaotic vibrations: an introduction for applied scientists and engineers. – New York : Wiley, 1987. – C. 219.
2. *Gulyaev, V.I., Bazhenov, V.A., Gotsulyak, E.A., Dekhtyaryuk, E.S. & Lizunov, P.P.* (1983). Stability of periodic processes in nonlinear mechanical systems. *Vyshcha Shkola, Lvov*. [in Russian].
3. *Allgower E.L., Georg K.* Introduction to numerical continuation methods. – Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.
4. *Nayfeh A.H., Balachandran B.* Applied nonlinear dynamics: analytical, computational, and experimental methods //Wiley Series in Nonlinear Sciences. – John Wiley & Sons, Inc New York, 1995.
5. *Shalashilin V.I., Kuznetsov E.B.* Parametric continuation and optimal parametrization in applied mathematics and mechanics. – Springer Science & Business Media, 2013.
6. *Sracic M.W., Allen M.S.* Numerical continuation of periodic orbits for harmonically forced nonlinear systems //Civil Engineering Topics, Volume 4. – 2011. – C. 51-69.
7. *Seydel R.* Practical bifurcation and stability analysis. – Springer Science & Business Media, 2009. – T. 5.
8. *Sharkovsky, A.N.* Basins of attractors of trajectories. //Naukova Dumka.Kyev.– 2013. (in Russian)
9. *Nordmark A.B.* Non-periodic motion caused by grazing incidence in an impact oscillator //Journal of Sound and Vibration. – 1991. – T. 145. – №. 2. – C. 279-297.
10. *Shaw S.W., Holmes P.J.* A periodically forced piecewise linear oscillator //Journal of Sound and Vibration. – 1983. – T. 90. – №. 1. – C. 129-155.
11. *Ibrahim R.A.* Vibro-impact dynamics: modeling, mapping and applications. – Springer Science & Business Media, 2009. – T. 43.
12. *Foale S., Bishop S.R.* Bifurcations in impact oscillations //Nonlinear Dynamics. – 1994. – T. 6. – №. 3. – C. 285-299.
13. *Luo A.C.J., Guo Y.* Vibro-impact dynamics. – John Wiley & Sons, 2012.
14. *Leine R.I., Van Campen D.H.* Discontinuous bifurcations of periodic solutions //Mathematical and computer modelling. – 2002. – T. 36. – №. 3. – C. 259-273.
15. *Ivanov A.P.* Analysis of discontinuous bifurcations in nonsmooth dynamical systems //Regular and Chaotic Dynamics. – 2012. – T. 17. – №. 3. – C. 293-306.
16. *Leine R.I., Van Campen D.H., Van de Vrande B.L.* Bifurcations in nonlinear discontinuous systems //Nonlinear dynamics. – 2000. – T. 23. – №. 2. – C. 105-164.
17. *Di Bernardo M.* et al. Bifurcations in nonsmooth dynamical systems //SIAM review. – 2008. – T. 50. – №. 4. – C. 629-701.
18. *Brogliato B., Brogliato B.* Nonsmooth mechanics. – London : Springer-Verlag, 1999. – C. 263-282.
19. *Brogliato B.* (ed.). Impacts in mechanical systems: analysis and modelling. – Springer Science & Business Media, 2000. – T. 551.
20. *Shvets A.Yu.* New Ways of Transitions To Deterministic Chaos In Non Ideal Oscillating Systems / A.Yu. Shvets, V.O. Sirenko // Research Bulletin of National Technical University of Ukraine “Kyiv Polytechnic Institute”. – 2015, № 1(99). – p. 45 – 51.

21. *Nazarenko I.I.* Applied problems of the vibration systems theory: Textbook (2nd edition) // Kyiv: Publishing House "Word". – 2010.
22. *Lichtenberg A.J., Lieberman M.A.* Regular and stochastic motion. – Springer Science & Business Media, 2013. – Т. 38.
23. *Chirikov B.V., Shepelyanskii D.L.* Dynamics of some homogeneous models of classical Yang-Mills fields //Soviet Journal of Nuclear Physics. – 1982. – Т. 36. – №. 6. – С. 908-915.
24. *Kuznetsov S.P.* Dynamic Chaos (Fizmatlit, Moscow, 2001) //Google Scholar. – С. 43-63.
25. *Benettin G.* et al. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory //Meccanica. – 1980. – Т. 15. – №. 1. – С. 9-20.
26. *Wolf A.* et al. Determining Lyapunov exponents from a time series //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1985. – Т. 16. – №. 3. – С. 285-317.
27. *Müller P.C.* Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities //Chaos, Solitons & Fractals. – 1995. – Т. 5. – №. 9. – С. 1671-1681.
28. *Stefanski A.* Estimation of the largest Lyapunov exponent in systems with impacts //Chaos, Solitons & Fractals. – 2000. – Т. 11. – №. 15. – С. 2443-2451.
29. *Stefanski A.* et al. Using chaos synchronization to estimate the largest Lyapunov exponent of nonsmooth systems //Discrete Dynamics in Nature and society. – 2000. – Т. 4. – №. 3. – С. 207-215.
30. *Stefanski A., Kapitaniak T.* Estimation of the dominant Lyapunov exponent of non-smooth systems on the basis of maps synchronization //Chaos, Solitons & Fractals. – 2003. – Т. 15. – №. 2. – С. 233-244.
31. *De Souza S.L.T., Caldas I.L.* Calculation of Lyapunov exponents in systems with impacts //Chaos, Solitons & Fractals. – 2004. – Т. 19. – №. 3. – С. 569-579.
32. *Stefanski A., Dabrowski A., Kapitaniak T.* Evaluation of the largest Lyapunov exponent in dynamical systems with time delay //Chaos, Solitons & Fractals. – 2005. – Т. 23. – №. 5. – С. 1651-1659.
33. *Agno A., Sinopoli A.* Lyapunov's exponents for nonsmooth dynamics with impacts: Stability analysis of the rocking block //International Journal of Bifurcation and Chaos. – 2005. – Т. 15. – №. 06. – С. 2015-2039.
34. *Andreas U., Placidi L., Rega G.* Numerical simulation of the soft contact dynamics of an impacting bilinear oscillator //Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2010. – Т. 15. – №. 9. – С. 2603-2616.
35. *Qun-Hong L., Jie-Yan T.* Lyapunov exponent calculation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system with symmetrical rigid stops //Chinese Physics B. – 2011. – Т. 20. – №. 4. – С. 040505.
36. *Li Q.* et al. The analysis of the spectrum of Lyapunov exponents in a two-degree-of-freedom vibro-impact system //International Journal of Non-Linear Mechanics. – 2011. – Т. 46. – №. 1. – С. 197-203.
37. *Baumann M.* Synchronization of nonsmooth mechanical systems with impulsive motion : дис. – ETH Zurich, 2017.
38. *Serweta W.* et al. Lyapunov exponents of impact oscillators with Hertz' s and Newton' s contact models //International Journal of Mechanical Sciences. – 2014. – Т. 89. – С. 194-206.
39. *Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.* (2017) Stability and Discontinuous Bifurcations in Vibroimpact System: Numerical investigations. LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH and Co. KG Dudweiler, Germany.
40. *Bazhenov, V.A., Lizunov, P.P., Pogorelova, O.S., Postnikova, T.G.* (2013) Numerical Bifurcation Analysis of Discontinuous 2-DOF Vibroimpact System. Part 2: Frequency-Amplitude response. Journal of Applied Nonlinear Dynamics, 5(3), 269–281.

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.*

### **ОЦІНКА ЛЯПУНОВСЬКИХ ХАРАКТЕРИСТИЧНИХ ПОКАЗНИКІВ ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛІНІЙНОЇ НЕГЛАДКОЇ РОЗРИВНОЇ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ**

Ляпуновські показники є одними з найважливіх характеристик, що необхідні для визначення стану динамічної системи. Їхня оцінка для негладкої розривної системи, якою і є віброударна система, викликає певні складності. В статті вивчається їхнє обчислення шляхом слідування за характером еволюції відстані між зображуваними точками у часі для двох копій динамічної системи з близькими початковими умовами. Для обчислення використовуються три різних формули. Оцінка перевіряється для трьох різних коливальних режимів: періодичного, квазіперіодичного та хаотичного. Вдалося також знайти старший Ляпуновський показник за допомогою відомого алгоритму Бенеттіна та порівняти результати обчислень усіма цими способами.

**Ключові слова:** негладка динамічна система, показник Ляпунова, близькі орбіти, алгоритм Бенеттіна.

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.*

### **ВЫЧИСЛЕНИЕ ЛЯПУНОВСКОГО ПОКАЗАТЕЛЯ ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ НЕГЛАДКОЙ РАЗРЫВНОЙ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ**

Ляпуновские показатели – это одни из важнейших характеристик, необходимых для определения состояния динамической системы. Их оценка для негладкой разрывной системы, каковой и является виброударная система, представляет определенные трудности. В статье изучается их вычисление путем отслеживания характера эволюции расстояния между изображающими точками во времени для двух копий динамической системы с близкими начальными условиями. При этом для вычисления используются три различных формулы. Оценка проверяется для трех различных колебательных режимов: периодического, квазипериодического и хаотического. Также удалось определить старший Ляпуновский показатель с помощью известного алгоритма Бенеттина и сравнить результаты вычислений всеми этими способами.

**Ключевые слова:** негладкая динамическая система, показатель Ляпунова, близкие орбиты, алгоритм Бенеттина.

УДК 539.3

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.*

**Оцінка ляпуновських характеристикних показників для сильно нелінійної негладкої розривної віброударної системи**// Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99. – С. 90 – 105.

*Ляпуновські показники є одними з найважливіх характеристик, що необхідні для визначення стану динамічної системи. Їхня оцінка для негладкої розривної системи, якою і є віброударна система, викликає певні складності. В статті вивчається їхнє обчислення шляхом слідування за характером еволюції відстані між зображуваними точками у часі для двох копій динамічної системи з близькими початковими умовами. Для обчислення використовуються три різних формули. Оцінка перевіряється для трьох різних коливальних режимів: періодичного, квазіперіодичного та хаотичного. Вдалося також знайти старший Ляпуновський показник за допомогою відомого алгоритму Бенеттіна та порівняти результати обчислень усіма цими способами.*

UDC 539.3

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G. Lyapunov exponents estimation for strongly nonlinear nonsmooth discontinuous vibroimpact system // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 99. – P. 90 – 105.*

*Lyapunov exponents are ones of the most important characteristics for the definition of the dynamical system state. Their estimation for nonsmooth discontinuous system that is vibroimpact system has got certain difficulties. We study their calculation by following the evolution of two nearby orbits in phase space and use three formulas for such estimation. We check this calculation for three different oscillatory regimes: periodic, quasi-periodic and chaotic. We also define the largest Lyapunov exponent by Benettin's algorithm and compare obtained results.*

Table 3. Fig. 6. Ref. 37

УДК 539.3

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г. Вычисление ляпуновского показателя для сильно нелинейной негладкой разрывной виброударной системы // Сопроотивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вып. 99. – С. 90 – 105.*

*Ляпуновские показатели – это одни из важнейших характеристик, необходимых для определения состояния динамической системы. Их оценка для негладкой разрывной системы, каковой и является виброударная система, представляет определенные трудности. В статье изучается их вычисление путем отслеживания характера эволюции расстояния между изображающими точками во времени для двух копий динамической системы с близкими начальными условиями. При этом для вычисления используются три различных формулы. Оценка проверяется для трех различных колебательных режимов: периодического, квазипериодического и хаотического. Также удалось определить старший Ляпуновский показатель с помощью известного алгоритма Бенеттина и сравнить результаты вычислений всеми этими способами.*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, академік Національної академії педагогічних наук України, директор НДІ будівельної механіки **БАЖЕНОВ Віктор Андрійович**

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу**

**Адреса домашня:** 02001 Україна, м. Київ, вул. Заньковецької 30, кв. 22, **БАЖЕНОВУ Віктору Андрійовичу**

**Роб. тел.:** +38(044) 245-48-29;

**Мобільний тел.:** +38(067) 111-22-33;

**E-mail:** [vikabazh@ukr.net](mailto:vikabazh@ukr.net)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки **ПОГОРЕЛОВА Ольга Семенівна**

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, **ПОГОРЕЛОВІЙ Ользі Семенівні**.

**Адреса домашня:** 02147 Україна, м. Київ, вул. Русанівська Набережна 18, кв. 61, **ПОГОРЕЛОВІЙ Ользі Семенівні**

**Роб. тел.:** +38(044) 245-48-29;

**Мобільний тел.:** +38(067) 606-03-00;

**Дом. тел.:** +38(044) 517-25-08;

**E-mail:** [pogos13@ukr.net](mailto:pogos13@ukr.net)



**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки ПОСТНІКОВА Тетяна Георгіївна

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ПОСТНІКОВІЙ Тетяні Георгіївні.

**Адреса домашня:** 04210, Україна, м. Київ, пр. Героїв Сталінграду 24, кв. 17, ПОСТНІКОВІЙ Тетяні Георгіївні

**Роб. тел.:** +38(044) 245-48-29;

**Мобільний тел.:** +38(050) 353-47-19;

**Дом. тел.:** +38(044) 411-46-56;

**E-mail:** [posttan@ukr.net](mailto:posttan@ukr.net)

УДК 539.3

## ПИТАННЯ ПОБУДОВИ СУЧАСНИХ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ БІОМЕХАНІКИ ПРИ ВИРШЕННІ ПРОБЛЕМ ЕНДОПРОТЕЗУВАННЯ КУЛЬШОВОГО СУГЛОБА

**І.В. Гужевський<sup>1</sup>,**

кандидат медичних наук, провідний науковий співробітник

**І.І. Солодей<sup>2</sup>,**

доктор технічних наук, старший науковий співробітник

<sup>1</sup> *Інститут травматології та ортопедії НАМН України, Київ  
Бульварно-Кудрявська вул., 27, м. Київ, 01601*

<sup>2</sup> *Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, 03680*

В роботі проведено аналіз сучасного стану проблеми вивчення механічних аспектів ендопротезування кульшового суглоба. Особливу увагу приділено питанням вибору фізико-механічних характеристик матеріалів, критеріїв міцності, моделі навантаження та умов закріплення. Наведені результати розгляду низки розрахункових схем, які дозволили окреслити подальші кроки при пошуку найбільш ефективних шляхів розвитку означених біомеханічних моделей.

**Ключові слова:** біомеханіка, математична модель, ендопротезування, імплантант, кістка, кульшовий суглоб, метод скінченних елементів, фізико-механічні характеристики матеріалів, критеріїв міцності, модель навантаження, умови закріплення.

**Вступ.** Ендопротезування в даний час є широко поширеним способом лікування захворювань опорно-рухового апарату. Імплантація штучного суглоба дозволяє усунути або значно зменшити больовий синдром, забезпечити опороздатність кінцівки, відновити рухи в суглобі.

Хоча тотальне ендопротезування є одним з найуспішніших з усіх хірургічних процедур, ряд питань, пов'язаних з дизайном, матеріалами, розташуванням імплантанту залишаються відкритими. На сьогодні немає повного розуміння реальних процесів, що визначають біомеханічну поведінку штучних суглобів в реальних фізіологічних умовах при різних анатомічних варіантах будови суглобових структур. Тому вивчення поведінки системи імплант-кістка експериментальними методами, а також методами, заснованими на математичному аналізі, набуває все більшого значення. Велика кількість досліджень направлена на вивчення механічних аспектів взаємодії ендопротеза і кісткової тканини, особливу увагу приділено визначенню впливу конструкції ендопротеза на напружено-деформований стан кістки.

Експериментальні дослідження виявляють особливості впливу конструкції ендопротеза на перерозподіл зовнішнього навантаження в кістковій тканині [12, 13]. Але, все ж таки, недоліком є технічні

обмеження, що не дозволяють моделювати складні умови навантаження системи кістка-імплантат, обумовлені фізіологічною активністю людини. Крім того, для опису процесів, що протікають в кістковій тканині, необхідна реєстрація напружень всередині кістки, яка вкрай важка при експериментальному підході. Тому все більшої популярності набувають методи математичного моделювання механічної поведінки системи кістка-ендопротез [5, 11]. При цьому, отримані експериментальні дані використовуються для перевірки параметрів і оцінки адекватності математичних моделей.

В загальному вигляді система рівнянь механіки твердого тіла при урахуванні зміни всіх факторів та анізотропії структури тканин дуже складна, тому для вивчення функціонування біосистеми, виявлення зон можливих руйнувань використовуються різні методи фізичного і математичного моделювання. Для механічного опису проблем нерідко залучають модельні задачі, які мають аналітичні рішення, від одноосно розтягнутого або стиснутого стержня до сфери або циліндра, навантажених тиском [4]. Такі моделі, як правило, можна використовувати для отримання якісної картини розподілу напружень і для обчислення інтервалу можливої зміни параметрів при дії навантажень.

Сучасне програмне забезпечення дозволяє створити більш адекватну математичну модель такої системи і прорахувати напруження, що виникають при різних умовах експлуатації ендопротеза. Огляд досліджень, спрямованих на розробку критеріїв прогнозування тріщин і переломів в кістках з дефектами і неушкоджених кістках, показує, що найбільш розповсюдженими є скінченноелементне моделювання, рентгенівська комп'ютерна томографія або рутинна рентгенографія. Відомо, що на сьогоднішній день метод скінченних елементів (МСЕ) є найбільш потужним інструментом для аналізу проблем механіки деформівного твердого тіла. За останні декілька років розмірність МСЕ моделей різко виросла, що визначається підвищеними вимогами до точності і достовірності результатів, спонукаючи використання все більш і більш докладних розрахункових схем. Метод скінченних елементів використовується для розв'язання просторових задач, задач з урахуванням фізичної і геометричної нелінійності, задач, що залежать від часу, механіки руйнування, повзучості, стійкості, теплопровідності і багатьох інших [1-3, 9].

**1. Фізико-механічні характеристики кісткової тканини та сучасних матеріалів протезування.** Літературні дані про фізико-механічні властивості матеріалів опорно-рухового апарату вельми неоднозначні. Це обумовлено як відмінністю у властивостях самих випробуваних препаратів, що пов'язано з великою кількістю

фізіологічних, анатомічних і інших причин, так і відмінностями в методиках визначення та труднощами вичленування зразків для випробувань.

Для кісткової тканини, що утворює компактна речовина у людини, модуль пружності Ект коливається, за різними даними, в межах 4-20 *ГПа* (в середньому 14 *ГПа*) [15] або 10-22 *ГПа* (в середньому 16 *ГПа*) [19]. При старінні це значення змінюється, так як відбувається зниження модуля пружності Ект від його рівня в 35 років на 2.3% за кожне наступне десятиліття [25].

Не менш важливе значення для аналізу міцності кісткової тканини мають, так звані, характеристики. Наприклад, міцність кісток стегнової кістки при розтязі, стисненні, вигині різні і складають відповідно  $\sigma_p = 74-134$  *МПа*,  $\sigma_c = 120-200$  *МПа*,  $\sigma_{\text{виг}} = 180$  *МПа* [7]. Межі міцності кісткової тканини відповідно до даних дослідження [22] мають значення: при розтязі 140 *МПа*, при стисненні 200 *МПа*, а максимальне дотичне напруження, яке витримує матеріал, дорівнює 65 *МПа*. У роботах [6, 20, 24] наведені близькі до вже розглянутих дані. Так для кортикального (субхондрального) шару модуль пружності складає 10-17 *ГПа*, коефіцієнт Пуассона дорівнює 0.3, напруження руйнування - 80-160 *МПа*. При цьому для спонгіозної тканини кістки ці значення значно нижче: модуль пружності - 0.5-1.5 *ГПа*, коефіцієнт Пуассона - 0.3, напруження руйнування - 3-4 *МПа* при розтязі і 10-12 *МПа* при стисненні.

Фізико-механічні характеристики спеціалізованих матеріалів, які використовуються при виробництві елементів протезів можна знайти наприклад в [24]. Для сталі 316L модуль пружності складає 200 *ГПа*, коефіцієнт Пуассона - 0.3, межа міцності 500 *МПа*. Титановий сплав має модуль пружності 110-130 *ГПа*, а корундова кераміка 300-400 *ГПа*. Часто використовується кістковий цемент, що характеризується модулем пружності 2 *ГПа*, коефіцієнтом Пуассона 0.3 і межею міцності 38 *МПа* при розтязі і 75 *МПа* при стисненні.

**2. Огляд критеріїв міцності.** Переломи кісток виникають в результаті навантаження, що перевищує межу їх міцності. Для кожної кістки, по різних осях, величини граничного навантаження відрізняються. Тип перелому в кожному конкретному випадку залежить від напрямку вектора прикладеної сили. Коли ми говоримо про кістки то в більшості випадках маємо на увазі крихкий матеріал, який безумовно є ортотропним, але при цьому ще й пористим. Все це накладає на дослідника великий вантаж урахування всіх цих особливостей. Структура кістки (структура остеона - як основного елемента, що забезпечує жорсткість кісткової тканини) в першому наближенні може бути представлена як структура композитного матеріалу [8, 10]. Реальні моделі в сучасних скінченно-елементних пакетах практично відсутні, це занадто

спеціалізована область досліджень. Тому руйнування кістки розглядають головним чином як макроскопічне явище, при якому кістка ламається на дві або більше частин (рис. 1). Зазвичай до руйнування з'являються мікротріщини.

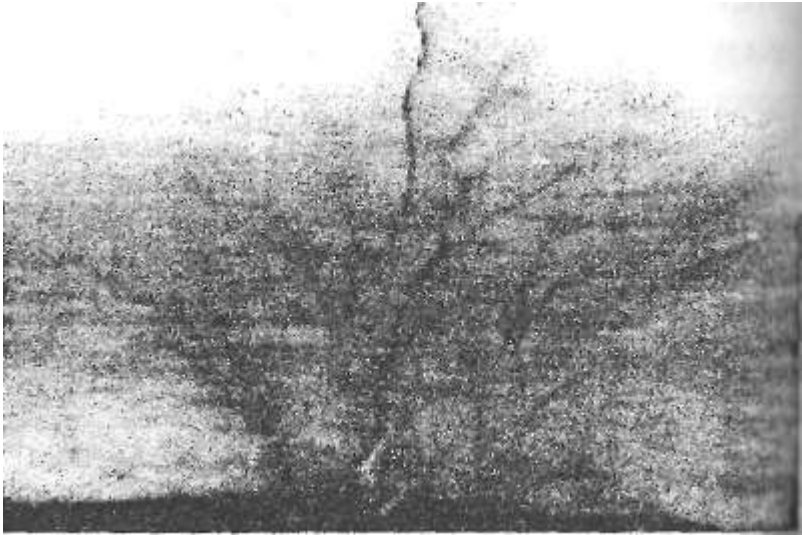


Рис. 1. Зона руйнування

Велика увага при прогнозуванні міцності трубчастих кісток з пострезекційними і метастатичними дефектами, а також виникненні в них патологічних переломів приділяється знаходженню головних або еквівалентних напружень [17]. Огляд досліджень, виконаних в цьому напрямку, представлений в роботі [23]. Із визначенням головних напружень також пов'язаний підхід оцінки міцності кістки, заснований на визначенні пошкодженості кісткової тканини. Зокрема, в роботі [18] запропоновано використання коефіцієнтів безпеки (або коефіцієнтів, що характеризують запас міцності), які визначаються відношенням допустимого відповідно до певної теорії міцності, напруження до розрахункового напруження. Значення коефіцієнтів безпеки визначаються для кожного із скінчених елементів. Величина коефіцієнта менша одиниці, вказує на пошкодженість відповідного елемента і дозволяє прогнозувати локалізацію і характер перелому. Безпосереднє вимірювання об'єму пошкоджених скінчених елементів для оцінки міцності дистального відділу променевої кістки і проксимального відділу стегнової кістки запропоновано в роботах [16, 21]. Тут пошкодженим вважається елемент, для якого не виконується певний критерій міцності. Перевагою

такого підходу є не тільки можливість прогнозування виникнення тріщини або перелому, а також можливість визначення локалізації і характеру перелому.

Оцінка гіпотез руйнування у порівнянні їх з експериментальними даними дозволяє зробити наступні висновки. Для ізотропних матеріалів, які руйнуються крихко, найкраще використовувати гіпотезу максимального нормального напруження. Для ізотропних матеріалів, які руйнуються шляхом пластичного розриву, найкраще використовувати гіпотезу питомої енергії формозміни або максимального дотичного напруження. У тих випадках, коли це можливо, слід застосовувати методи механіки руйнування.

Волокна кісткової тканини зазнають переважно пружні деформації, а матриця - пластичні. Шляхом експериментів встановлено, що для кісткової тканини найнебезпечнішим є напруження розтягу. Міцність кісток при стисненні висока.

**3. Модель зовнішніх навантажень.** Дослідження поведінки системи “кістка-імплантат” з використанням методів математичного аналізу актуальне та має важливе значення для оцінки працездатності біомеханічної системи “чаша ацетабулярного компонента – кісткова тканина”. Зони та величини стресових навантажень, які виникають на ділянках контактуючих поверхонь чашки і головки протеза є основними чинниками при аналізі міцності подібних систем. В даному випадку важливого значення набувають схеми прикладання навантаження та умов фіксації об'єкта дослідження у просторі.

Для побудови та обґрунтування моделі навантаження на першому етапі розроблено розрахункові скінченно-елементні апроксимації ендопротеза, який встановлюється шляхом запресування у вертлюгову западину. Проведено оцінку контактних напружень на внутрішній та зовнішній поверхнях чашки при дії власної ваги пацієнта (напрямок відповідає положенню стоячи) для різних моделей навантаження системи.

Для дослідження процесів навантаження біологічних об'єктів поки не створені спеціалізовані програмні засоби, тому для аналізу ми застосували універсальну комп'ютерну програму SAFEM [2, 3] розроблену Науково-дослідним інститутом будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури.

Розглядаючи порівняно повільні локомоції, нехтуємо як інерційними властивостями елементів нижньої кінцівки, так і моментами сил тертя в суглобі. Геометричні параметри моделі ніжки ендопротеза точно відповідають їх реальним розмірам. Для розрахунків прийнято діаметр чаші 36 мм, товщина стінок 6 мм. Величина статичного навантаження – 810 Н, що є еквівалентом середньої маси тіла людини.

Розрахунки проводились виходячи з того, що взаємного зміщення компонентів не відбувається, а сумісність деформації досягається за рахунок пружної деформації поверхневих шарів матеріалів компонентів. Взаємодія пари «голівка - чаша» моделюється спеціальними контактними скінченними елементами, що сприймають тільки нормальне до поверхні контакту навантаження [3].

Одним з найбільш відповідальних моментів моделювання є формування механічного навантаження. Аналіз літератури показує, що в багатьох випадках побудови чисельних моделей сила ваги прикладається вертикально до поверхні голівки ендопротезу та проходить через її центральну точку [5].

На першому етапі досліджень було зроблено порівняння двох моделей M1 та M2 з відмінними системами сил. M1 – повторює традиційний підхід (рис. 2), M2 – моделює навантаження, які прикладені безпосередньо до стегнової кістки, тобто із деяким зміщенням від центру голівки (рис. 3).

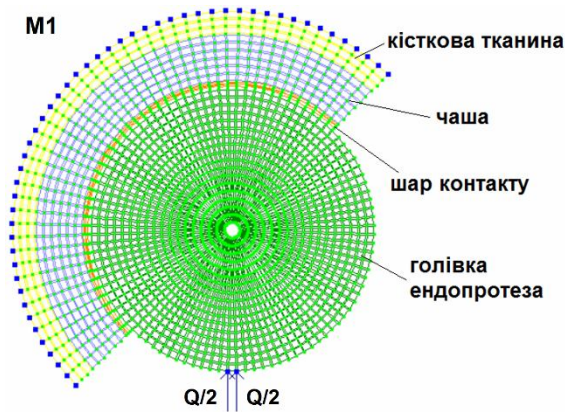


Рис. 2. Модель M1

Представлено розподіл відносних величин контактних зусиль між голівкою і чашкою та напружень на поверхні чашки на куті розтвору 180 градусів знизу до верху (рис. 4).

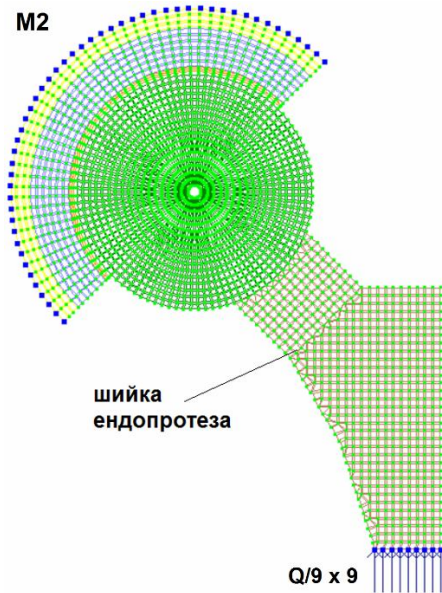


Рис. 3. Модель М2

Як видно із отриманих результатів, максимальні значення контактних зусиль майже не змінюються. На протипагу цьому, місце їх розташування зміщується у напрямку тазової кістки.

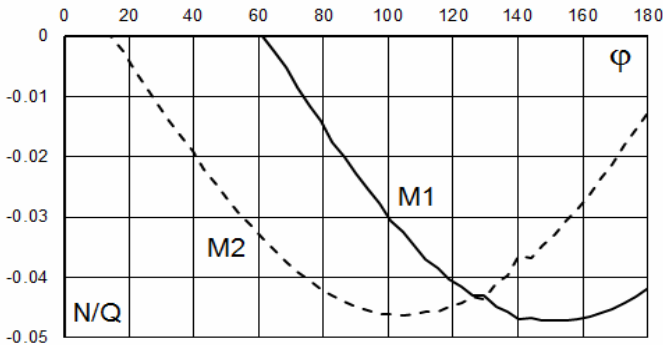


Рис. 4. Розподіл відносних величин контактних зусиль

Характерна зміна помітна на обох графіках. Для сприйняття загальної картини розподілення визначальних напружень, побудовані ізолінії радіальних компонент  $S_r$  тензора напружень (рис. 5а, б).



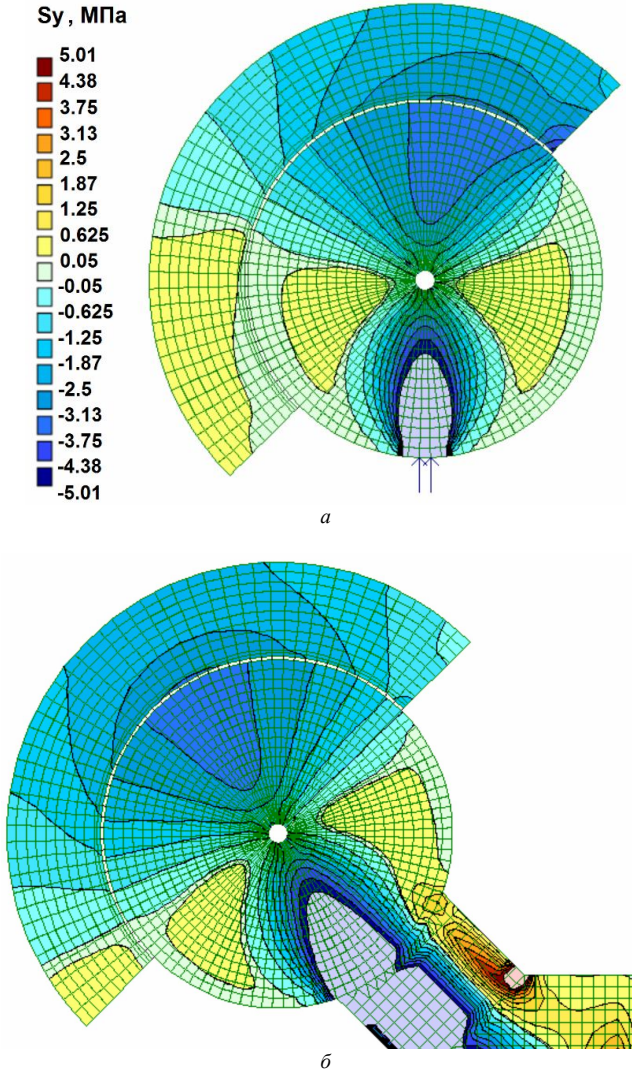


Рис. 5. Ізолнії радіальних компонент  $S_y$  тензора напружень  
(*a* - модель M1, *б* - модель M2)

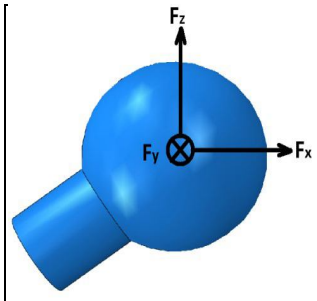
Контактне навантаження, яке передається від голівки ендопротеза до вертлюгової западини, може бути представлено у вигляді головного вектора  $F$ . У свою чергу рівнодіюча сила  $F$  може бути подана у вигляді 3-х складових компонентів, отриманих при розкладі  $F$  на осі локальної декартової системи координат, яка пов'язана з голівкою ендопротеза (або

головкою стегнової кістки, у випадку здорової кістки) (таб. 1).  $X$  - фронтальна вісь;  $Y$  - сагітальна вісь;  $Z$  - вертикальна вісь.

Відповідно до роботи [14], горизонтальна компонента вздовж фронтальної осі  $X$  становить 52% від ваги тіла людини.

У таблиці 1 для порівняння наведено дані розподілу проєкцій головного вектора сил виходячи з сумарних значень в шарі контактних скінченних елементів.

Таблиця 1



Модель	Вага тіла, $H$	$F_x, H$	Вага тіла, %
M1	810	1	< 1
M2	810	481	59

Спостерігається добре узгодження даних [14] з даними, які отримані на основі моделі M2, 52% і 59% відповідно.

**4. Вибір умов закріплення моделі.** Умови закріплення повинні задаватись відповідно до того, як кістка розташовується в тілі (рис. 6). На сьогоднішній день існує два підходи їх моделювання. Найбільш



Рис. 6. Кульшовий суглоб

розповсюджений - жорстке защемлення задніх відділів тазової кістки.

Такий підхід можна спостерігати в літературі як для чисельних, так і натурних експериментів (рис. 7). Однак, в передній області ліва і права частини тазових кісток також з'єднуються між собою (рис. 6). У цьому випадку можна говорити про модель, скоріше як про балку на двох опорах - жорсткій і рухомій, що моделює площину симетрії, а не жорстко защемлений консолі.

Проведено порівняння двох варіантів розрахункової схеми із

закріпленнями при обмеженні горизонтальних переміщень нижньої частини тазової кістки РО2 (Рухома Опора) і при вільному краї (БО2 - без опори). Розрахункова схема показана на рис. 8.

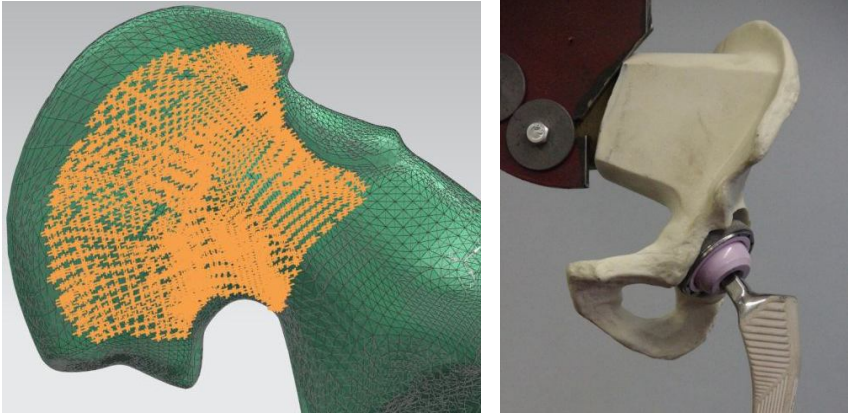


Рис. 7. Умови закріплення (чисельний, натурний експерименти)

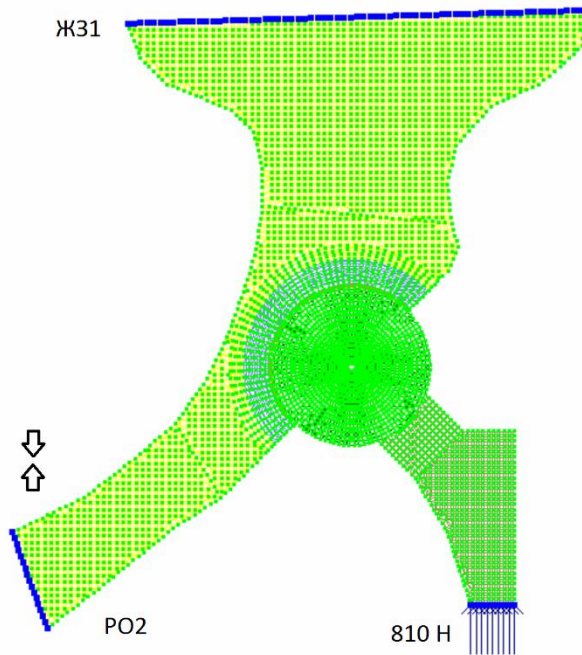


Рис. 8. Розрахункова схема

Результати представлені у вигляді ізоліній найбільш небезпечних головних напружень  $N_1$  (рис. 9, 10), оскільки в більшості своїй вони є розтягуючими компонентами тензора напружень. Добре помітні, основні відмінності між двома моделями закріплення. Видно, що концентрація напружень локалізується в області даху вертлюгової западини для обох випадків. Однак для першої моделі, поле напружень перерозподіляється.

Рівень падає майже вдвічі, що пояснюється включенням в роботу другої опори. Співставні за величиною розтягуючі напруження спостерігаються тепер також над куполом вертлюгової западини в найбільш тонкій частині моделі (рис. 9).

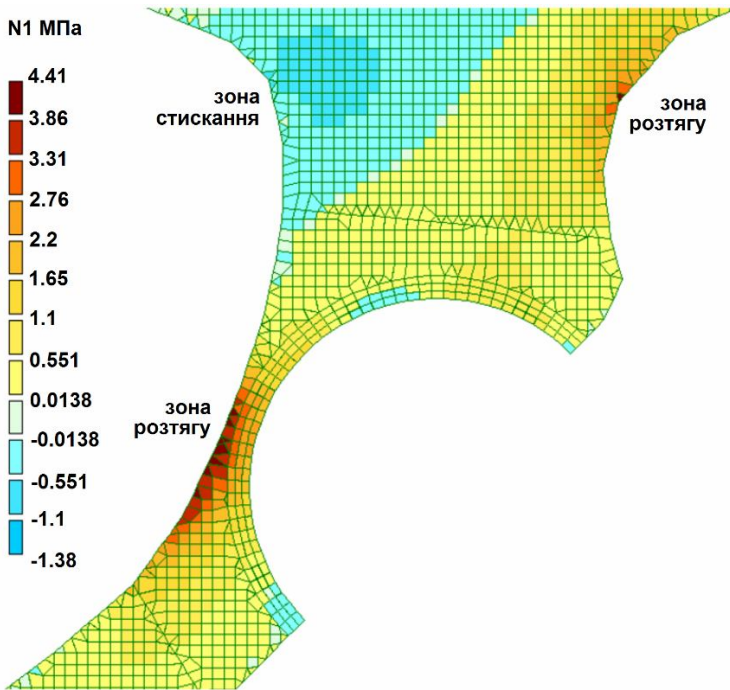


Рис. 9. Напруження  $N_1$ , модель PO2

**Висновки.** Очевидно, що побудова сучасних математичних моделей біомеханіки при вирішенні проблем протезування кісткової тканини тісно пов'язана із постановкою задач опору матеріалів, теорії пружнопластичності та механіки суцільного середовища. В цьому сенсі, на перший план виходять питання вибору фізико-механічних характеристик матеріалів, урахування їх нелінійної роботи, критеріїв міцності, моделі навантаження та умов закріплення, як важливих чинників, точність опису

яких дозволяє значно підвищити впевненість при прийнятті тих чи інших проектних рішень.

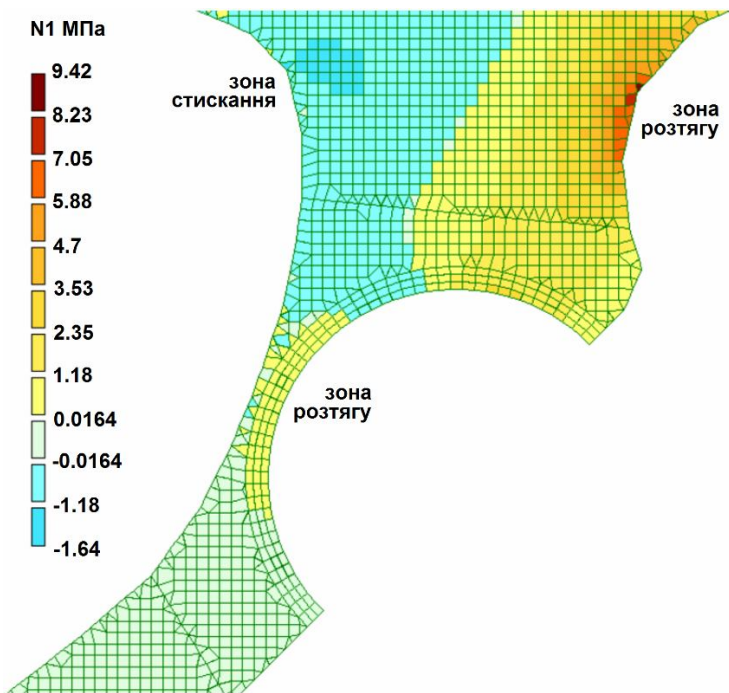


Рис. 10. Напруження  $N_1$ , модель БО2

Проблематичність опису біомеханічних процесів визначається не тільки неоднорідністю структури самої кісткової тканини, але і еволюційним характером її зміни у часі, тобто можливістю адаптації структури до зовнішніх умов, в тому числі зміни показників міцності.

Складність проведення натурних експериментів для оцінки реальних процесів деформування, а інколи їх неможливість, спонукають до розгляду декількох чисельних моделей, від обґрунтованих сенсом до жорстких консервативних. Тільки аналіз комплексних результатів дає найбільш повне розуміння принципів поведінки біомеханічної системи.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.

2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах континуального руйнування // К.: Каравела, 2014. – 236 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І. Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах динаміки просторових тіл // К.: Каравела, 2012. – 248 с.
4. *Беляев Н.М.* Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 856 с.
5. *Загородний Н.В., Елкин Д.В., Банацкий М.В., Мамонов А.М., Карпов В.Н.* Применение метода математического моделирования в оценке функционирования тотальных эндопротезов тазобедренного сустава // Вестник новых медицинских технологий - 2007 Том XIV - №4 - С 6-9.
6. *Карлов А.В., Шахов В.П.* Системы внешней фиксации и регуляторные механизмы оптимальной биомеханики. - Томск: СГТ, 2001. - 480 с.
7. *Обысов А.С.* Надежность биологических тканей / А.С. Обысов. – М., 1971. – 104 с.
8. Разрушение /Под ред. Г. Либовец // Пер. с англ.; В 7т. – Т.7: часть 2. – Разрушение неметаллов и композитных материалов. – М.: Мир, 1976. – 471с.
9. *Сегерлинд Л.Дж.* Применение метода конечных элементов / Сегерлинд Л.Дж // – М.: Мир, 1979.– 392 с.
10. *Сіменач Б.* Методологія як спосіб наукової діяльності / Б. Сіменач, П. Снісаренко, О. Бабуркина, І. Зеленецький // Ортопедия, травматология и протезирование. – 2006. – №3. – С. 110 – 115.
11. *Штлєвський І.Э.* Оценка прочности бедренной кости при секторальной резекции // Мед. новости.-2010, №9.-С.100-105.
12. *Шидловський Н.С.* Механічні дослідження різних способів з'єднання переломів вертлогової ділянки стегнової кістки людини / Н.С. Шидловський, Л.М. Юрійчук, Д.Ю. Шпак // Вісник Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут", Серія Машинобудування, – К: 2010. – № 59 – С. 271-276.
13. *Юрійчук Л.М.* Біомеханічна оцінка різних способів фіксації при нестабільних переломах вертлогової ділянки стегнової кістки в експерименті та застосування результатів дослідження в клініці / Л.М. Юрійчук, М.В. Полулях, М.С. Клепач, М.С. Шидловський, А.І. Баран, Ю.І. Попович // Літопис травматології та ортопедії. – № 1-2/2014 (29-30) – С.88-91.
14. *Bergmann G., Deuretzbacher G., Heller M., Graichen F., Rohlmann A., Strauss J., Duda G.N.* Hip contact forces and gait patterns from routine activities. / G. Bergmann, G. Deuretzbacher, M. Heller, F. Graichen, A. Rohlmann, J. Strauss, G.N. Duda. // Journal of Biomechanics 34 (2001) 859–871. 22 February 2001
15. *Currey J.D.* Mechanical properties of vertebrate hard tissues / J.D. Currey // Proc. Inst. Mech. Engrs. - 1998. - Vol. 212, Part H. -P. 399-411.
16. *Edwards W.B.* Finite element prediction of surface strain and fracture strength at the distal radius // Med. Eng. Phys.-2012.-Vol. 34.-P. 290-298.
17. *Elias J.J.* The open section effect in a long bone with a longitudinal defect - a theoretical modeling study // J. Biomech.-2000.-Vol. 33.-P. 1517-1522.
18. *Keyak J.H.* Prediction of femoral fracture load using finite element models: an examination of stress- and strain-based failure theories // J. Biomech.-2000.-Vol. 33.-P. 209-214.
19. *Lawson A.C.* Collagen-calcium-phosphate composites / A.C. Lawson, J.T. Czernuszka // Proc. Inst. Mech. Engrs. - 1998. - Vol. 212, Part H. - P. 413-425.
20. *Li S.* Cutting of Cortical Bone Tissue: Analysis of Deformation and Fracture Process // Loughborough, 2013. Chapter 2.-P. 20.
21. *Pistoia W.* Estimation of distal radius failure load with micro-finite element analysis models based on three-dimensional peripheral quantitative computed tomography images // Bone.-2002.-Vol. 30.-P. 842–848.
22. *Rubin C., Rubin J.* 2006 Biomechanics and Mechanobiology of Bone // American Society for Bone and Mineral Research-2006.-Chapter 6, p36-42.

23. *Schileo E.* Subject-specific finite element models implementing a maximum principal strain criterion are able to estimate failure risk and fracture location on human femurs tested in vitro // *J. Biomech.*-2008.-Vol. 41.-P. 356–367.
24. *Wirtz D.C., Schiffers N., Pandorf T., Radermacher K., Weichert D., Forst R.* Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic FE-simulation of the proximal femur. / D.C. Wirtz, N. Schiffers, T. Pandorf, K. Radermacher, D. Weichert, R. Forst // *Journal of Biomechanics* 33 (2000) 1325-1330 6 March 2000.
25. *Zioupou P.* Changes in the stiffness, strength, and toughness of human cortical bone with age / P. Zioupou, J.D. Currey // *Bone*. - 1998. - Vol. 22, No. 1. - P. 57-66.

## REFERENCES

1. *Bazhenov V.A.* Nelineynoe deformirovaniye i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoy struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi. (Nonlinear deformation and stability of elastic shells of an inhomogeneous structure: Models, methods, algorithms, little-known and new problems) / V.A. Bazhenov, O.P. Krivenko, N.A. Solovey // – M.: Knizhnyy dom «LIBRIKOM», 2013. – 336 p.
2. *Bazhenov V.A.* Napivanaliticheskiy metod skinchenykh elementiv v zadachakh kontynualnogo ruinyvaniya (Semi-analitic finite element method in problems of continual fracture) / V.A. Bazhenov, O.I. Gulyar, S.O. Pyskunov, O.S. Sakharov // – K.: Karavela, 2014. – 236 p.
3. *Bazhenov V.A.* Napivanaliticheskiy metod skinchenykh elementiv v zadachakh dynamiki prostorovykh til (Semi-analitic finite element method in the problems of the dynamics of spatial bodies) / V.A. Bazhenov, O.I. Gulyar, I.I. Solodei, O.S. Sakharov // – K.: Karavela, 2012. – 248 p.
4. *Belyaev N.M.* Soprotivlenie materialov (Strength of materials). - Moscow: GITTL, 1956. - 856 p.
5. *Zagorodniy N.V.* Primeneniye metoda matematicheskogo modelirovaniya v otsenke funktsionirovaniya totalnykh endoprotezov tazobedrennogo sustava (The method of mathematical modeling in the evaluation of the functioning of total hip joint endoprotheses) / N.V. Zagorodniy, D.V. Yelkin, M.V. Banetskiy, A.M. Mamonov, V.N. Karpov // *Bulletin of new medical technologies* – 2007, XIV – №4 – P. 6-9.
6. *Karlov A.V., Shakhov V.P.* Sistemy vneshney fiksatsii i regulatorynyye mekhanizmy optimalnoy biomehaniki (External fixation systems and regulatory mechanisms of optimal biomechanics). - Tomsk: STT, 2001. – 480 p.
7. *Obysov A.S.* Nadezhnost biologicheskikh tkaney (Reliability of biological tissues). - M., 1971. - 104 p.
8. *Razrusheniye (Destruction)* / Ed. G. Libovets // Transl. from the English; In 7T. - T.7: Part 2. - Destruction of non-metals and composite materials. - Moscow: Mir, 1976. - 471 p.
9. *Segerlind L.J.* Primeneniye metoda konechnykh elementov (The finite element method). – M.: Mir, 1979. – 392 p.
10. *Simenach B.* Metodolohiia yak sposib naukovoi diialnosti (Methodology as a way of scientific activity) / B. Simenach, P. Sinisarenko, O. Baburkina, I. Zelenetsky // *Orthopedics, traumatology and prosthetics*. - 2006. - №3. - P. 110 - 115.
11. *Shpilevskiy I.E.* Otsenka prochnosti bedrennoy kosti pri sektoralnoy rezektzii (Evaluation of the strength of the femur with sectoral resection) // *Med. News*. – 2010, №9. – P. 100-105.
12. *Shidlovskiy N.S.* Mekhanichni doslidzhennia riznykh sposobiv ziednannia perelomiv vertliuhovoi dilianky stehnovoi kistky liudyny (Mechanical researches of various ways of the human femur fractures stabilization) / N.S. Shidlovskiy, L.M. Yuriychuk, D.Yu. Shpak // *Bulletin of the National Technical University of Ukraine "Kyiv Polytechnic Institute"*, Series of Machine-Building, – K.: 2010. – No. 59 – P. 271-276.
13. *Yuriychuk L.M.* Biomekhanichna otsinka riznykh sposobiv fiksatsii pry nestabilnykh perelomakh vertliuhovoi dilianky stehnovoi kistky v eksperymenti ta zastosuvannia rezultativ doslidzhennia v klinitsi (Biomechanical estimation of different fixation ways for unstable fractures of the femur via experiment and usage of the study results in the clinic) / L.M.

- Yuriychuk, M.V. Poluliy, M.S. Klepach, M.S. Shidlovsky, A.I. Baran, Yu.I. Popovich // Chronicle of traumatology and orthopedics. – No. 1-2 / 2014 (29-30) – P. 88-91.
14. Bergmann G., Deuretzbacher G., Heller M., Graichen F., Rohlmann A., Strauss J., Duda G.N. Hip contact forces and gait patterns from routine activities. / G. Bergmann, G. Deuretzbacher, M. Heller, F. Graichen, A. Rohlmann, J. Strauss, G.N. Duda. // Journal of Biomechanics 34 (2001) 859–871. 22 February 2001
  15. Currey J.D. Mechanical properties of vertebrate hard tissues / J.D. Currey // Proc. Inst. Mech. Engrs. - 1998. - Vol. 212, Part H. -P. 399-411.
  16. Edwards W.B. Finite element prediction of surface strain and fracture strength at the distal radius // Med. Eng. Phys.-2012.-Vol. 34.-P. 290-298.
  17. Elias J.J. The open section effect in a long bone with a longitudinal defect - a theoretical modeling study // J. Biomech.-2000.-Vol. 33.-P. 1517-1522.
  18. Keyak J.H. Prediction of femoral fracture load using finite element models: an examination of stress- and strain-based failure theories // J. Biomech.-2000.-Vol. 33.-P. 209-214.
  19. Lawson A.C. Collagen-calcium-phosphate composites / A.C. Lawson, J.T. Czernuszka // Proc. Inst. Mech. Engrs. - 1998. - Vol. 212, Part H. - P. 413-425.
  20. Li S. Cutting of Cortical Bone Tissue: Analysis of Deformation and Fracture Process // Loughborough, 2013. Chapter 2.-P. 20.
  21. Pistoia W. Estimation of distal radius failure load with micro-finite element analysis models based on three-dimensional peripheral quantitative computed tomography images // Bone.-2002.-Vol. 30.-P. 842–848.
  22. Rubin C., Rubin J. 2006 Biomechanics and Mechanobiology of Bone // American Society for Bone and Mineral Research-2006.-Chapter 6, p36-42.
  23. Schileo E. Subject-specific finite element models implementing a maximum principal strain criterion are able to estimate failure risk and fracture location on human femurs tested in vitro // J. Biomech.-2008.-Vol. 41.-P. 356–367.
  24. Wirtz D.C., Schiffers N., Pandorf T., Radermacher K., Weichert D., Forst R. Critical evaluation of known bone material properties to realize anisotropic FE-simulation of the proximal femur. / D.C. Wirtz, N. Schiffers, T. Pandorf, K. Radermacher, D. Weichert, R. Forst // Journal of Biomechanics 33 (2000) 1325-1330 6 March 2000.
  25. Zioupos P. Changes in the stiffness, strength, and toughness of human cortical bone with age / P. Zioupos, J.D. Currey // Bone. -1998. - Vol. 22, No. 1. - P. 57-66.

Guzhevsky I.V., Solodei I.I.

#### **CONSIDERATION OF THE MODERN MATHEMATICAL BIOMECHANIC MODELS TO SOLVE PROBLEMS OF HIP JOINT ENDOPROSTHETIC**

Endoprosthetics is now a widespread way of treating diseases of the musculoskeletal system. Implantation of an artificial joint allows to eliminate or significantly reduce the pain syndrome, to ensure endurance of the limb, to restore movement in the joint.

Although total endoprosthetics is one of the most successful of all surgical procedures, a number of issues related to design, materials, implant placement remain open. Nowadays, there is no complete understanding of the real processes that determine the biomechanical behavior of artificial joints in real physiological conditions under various anatomical variants of the structure of articular structures. Therefore, the study of the behavior of the implant-bone system by experimental methods, as well as methods based on mathematical analysis, becomes more and more important.

A large number of studies aimed at studying the mechanical aspects of the interaction of endoprosthesis and bone tissue, special attention is paid to determining the impact of the design of the endoprosthesis on the stress-strain state of the bone.

Experimental studies reveal the peculiarities of the influence of the design of the endoprosthesis on the redistribution of external load in the bone tissue. But, nevertheless, the disadvantage are technical limitations that do not allow to simulate complicated loading conditions



of the bone-implant system due to human physiological activity. In addition, to describe the processes occurring in the bone tissue, it is necessary to record tension within the bone, which is extremely difficult in the experimental approach. Therefore, methods of mathematical modeling of mechanical behavior of the bone-endoprosthesis system are becoming increasingly popular.

The paper analyzes the current state of the problem of studying the mechanical aspects of hip arthroplasty. Particular attention is paid to the choice of physical and mechanical characteristics of materials, strength criteria, load models and boundary conditions.

The results of a several design schemes consideration that allowed to determine the further steps in the search for the most effective ways of development of these biomechanical models are presented.

**Key words:** biomechanics, mathematical model, endoprosthetic, implant, bone, hip joint, finite element method, physical and mechanical characteristics of materials, strength criteria, load model, boundary conditions.

*Гужевский И.В., Солодей И.И.*

### **ВОПРОСЫ ПОСТРОЕНИЯ СОВРЕМЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ БИОМЕХАНИКИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМ ЭНДОПРОТЕЗИРОВАНИЯ ТАЗОБЕДРЕННОГО СУСТАВА**

В работе проведен анализ современного состояния проблемы изучения механических аспектов эндопротезирования тазобедренного сустава. Особое внимание уделено вопросам выбора физико-механических характеристик материалов, критериев прочности, модели нагрузки и условий закрепления. Приведены результаты рассмотрения ряда расчетных схем, которые позволили определить дальнейшие шаги при поиске наиболее эффективных путей развития указанных биомеханических моделей.

**Ключевые слова:** биомеханика, математическая модель, эндопротезирование, имплантант, кость, тазобедренный сустав, метод конечных элементов, физико-механические характеристики материалов, критерии прочности, модель нагрузки, условия закрепления.

УДК 539.3

*Гужевський І.В., Солодей І.І.* **Питання побудови сучасних математичних моделей біомеханіки при вирішенні проблем ендопротезування кульшового суглоба**// Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99. – С. 106 - 122.

*В роботі проведено аналіз сучасного стану проблеми вивчення механічних аспектів ендопротезування кульшового суглоба. Особливу увагу приділено питанням вибору фізико-механічних характеристик матеріалів, критеріїв міцності, моделі навантаження та умов закріплення.*

Табл. 1. Лл. 10. Бібліогр. 25 назв.

*Guzhevsky I.V., Solodei I.I.* **Consideration of the modern mathematical biomechanical models to solve problems of hip joint endoprosthetic**// Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Issue 99. – P. 106 – 122.

*The paper analyzes the current state of the problem of studying the mechanical aspects of hip arthroplasty. Particular attention is paid to the choice of physical and mechanical characteristics of materials, strength criteria, load models and boundary conditions.*

Tabl. 1. Pic. 10. Bibliogr. 25 titles.

*Гужевский И.В., Солодей И.И. Вопросы построения современных математических моделей биомеханики при решении проблем эндопротезирования тазобедренного сустава // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2017. – Вып. 99. – С. 106 - 122.*

*В работе проведен анализ современного состояния проблемы изучения механических аспектов эндопротезирования тазобедренного сустава. Особое внимание уделено вопросам выбора физико-механических характеристик материалов, критериев прочности, модели нагрузки и условий закрепления.*

Табл. 1. Ил. 10. Библиогр. 25 назв.

**Автор:** кандидат медичних наук, провідний науковий співробітник відділу захворювань суглобів у дорослих ДУ "ІТО НАМНУ" ГУЖЕВСЬКИЙ Ігор Віталійович

**Адреса робоча:** 01601 Україна, м. Київ, вулиця Бульварно-Кудрявська, 27, Інститут травматології та ортопедії НАМН України

**Робочий тел.:** +38(044) 486-69-14

**Мобільний тел.:** +38(067)408-21-27

**E-mail:** [guzhevsky.igor@gmail.com](mailto:guzhevsky.igor@gmail.com)

**Автор:** доктор технічних наук, старший науковий співробітник, зав. відділом НДІ будівельної механіки СОЛОДЕЙ Іван Іванович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38(050)357-44-90

**E-mail:** [isolodey@gmail.com](mailto:isolodey@gmail.com)

УДК 539.3

## ДЕФОРМУВАННЯ ПРУЖНИХ НЕОДНОРІДНИХ ОБОЛОНОК ПІД ДІЄЮ НЕСТАЦІОНАРНИХ ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

**В.К. Чибіряков,**

доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики

**О.П. Кривенко,**

кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник

**А.Д. Легостаєв,**

кандидат технічних наук, доцент

**Н.А. Гречух,**

науковий співробітник

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

Запропоновано алгоритм дослідження нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень. Методику побудовано на основі розробленої авторами скінченноелементної моделі тонкої пружної оболонки з різними геометричними особливостями за товщиною і створеної на її базі для задач динаміки редукованої моделі. Дано кількісне обґрунтування методу. Виконано порівняння розв'язків з теоретичними даними та результатами розрахунків, отриманими за програмним комплексом Scad.

**Ключові слова:** тонка пружна оболонка, універсальний просторовий скінченний елемент, редукована модель, імпульсне навантаження.

**Вступ.** Широке застосування оболонкових конструкцій у будівництві та різних галузях сучасної техніки визначається вимогами міцності та надійності, архітектурними рішеннями, технологічними потребами, економічними факторами та іншими чинниками. Оболонкові системи можуть поєднувати у собі різноманітні конструктивні неоднорідності: гладко-змінну товщину, ребра та накладки, підкріплені та невідкріплені отвори, виїмки, місцеві потовщення та стоншення, злами серединної поверхні та інші особливості, а всю конструкцію необхідно розглядати як оболонку змінної жорсткості. У цьому випадку класичні розрахункові схеми, методи й алгоритми виявляються малоефективними або зовсім непридатними.

Більшість робіт, що відносяться до дослідження оболонок ступінчасто-змінної товщини, присвячено статичі оболонок [1-3]. Незважаючи на інтенсивні дослідження, що проводяться впродовж останніх років, та певні досягнення, які отримані в теорії та методах розрахунку нестационарного деформування оболонок, на сьогодні

залишається ще багато нез'ясованих питань і невирішених проблем в області вивчення поведінки оболонкових конструкцій при динамічному навантаженні [4-14]. У першу чергу це стосується задач про реакцію оболонок на короткочасне (ударне й імпульсне) навантаження [5, 8, 10-14]. Вивчення особливостей поведінки оболонкових конструкцій (наприклад, літальних апаратів, суден, автомобілів і т.п.) при дії різко змінюваних навантажень викликає інтерес не тільки у теоретичному плані, а й з практичної точки зору [13]. Тому продовжують бути актуальними дослідження в області моделювання нестационарних процесів короткочасного характеру, що мають місце в пружних неоднорідних оболонках. Такий вид динамічних навантажень зустрічається, наприклад, при проектуванні споруд з урахуванням екстремальних впливів типу: удару від летючих тіл різної природи, вибуху, торнадо та штормів, падіння вантажів тощо [14]. Відомо, що дія зазначеного динамічного навантаження великої потужності може спричинити лише формозміну механічної системи, а самі оболонкові об'єкти можуть сприймати імпульсні навантаження досить високого рівня, не руйнуючись при цьому. Цей ефект використовується, наприклад, у технології формування оболонкових конструкцій з плоских заготовок при дії імпульсного навантаження [10]. Виявлено, що поведінка пружної оболонки, яка знаходиться під дією імпульсного навантаження, істотно відрізняється від аналогічної поведінки при статичному навантаженні [15]. Крім того вона може не втрачати стійкості, навіть коли статичне напруження (від імпульсу певної величини) досягає критичного значення [5]. Тому при формуванні оболонки з використанням динамічного навантаження вдається, на відміну від статичного, уникнути появи втрати стійкості та відповідного хвилеутворення матеріалу заготовки внаслідок підвищення рівня критичних навантажень.

При дослідженні деформування оболонкових конструкцій під дією динамічних навантажень чисельне математичне моделювання стало основним засобом вивчення їхньої поведінки через складність розв'язуваних задач, особливо це стосується неоднорідних оболонок. Найбільш успішно ця проблема може бути вирішена з позицій тривимірної теорії пружності та реалізації метода скінченних елементів на основі розробки та застосування універсальних просторових скінченних елементів [1-2, 7-9]. У теперішній час такий загальний підхід при дослідженні тонких оболонок набуває все більшого поширення і відповідає сучасним тенденціям розвитку нових методів їх розрахунку.

**1. Постановка задачі.** У роботі під імпульсними навантаженнями розуміються короткочасні сили й удари, що характеризуються помірною величиною імпульсу та не здатні викликати в елементах оболонкової конструкції макропластичних деформацій [11, 16]. Таким чином, під імпульсними навантаженнями (одноразової дії) будемо розуміти

короточасні сили сталого напрямку, що мають не більше одного максимуму за час її неперервної дії  $\tau$  (рис. 1)

$$F(t) = P_0 \begin{cases} f(t), & \text{при } t \in [0, \tau] \\ 0, & \text{при } t > \tau \end{cases},$$

де  $t=0$  – початок дії навантаження,  $P_0$  – її максимум (інтенсивність),  $f(t)$  – функція, що характеризує форму імпульсу, причому  $|f(t)|=1$ . Зазначені навантаження характеризуються трьома параметрами: 1) тривалістю дії  $\tau$ ; 2) формою імпульсу  $f(t)$ ; 3) найбільшою величиною  $P_0$ . На рис. 2 показані деякі форми короточасних навантажень: прямокутна, трикутна та параболічна.

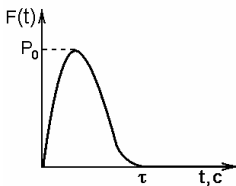


Рис. 1. Функція навантаження у часі  $F(t)$

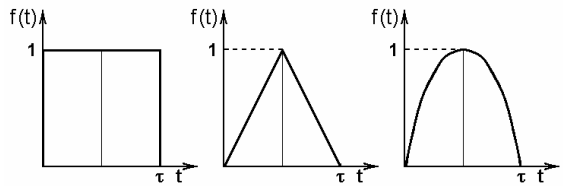


Рис. 2. Приклади форм короточасних навантажень  $f(t)$

Тривалість дії експлуатаційних імпульсних навантажень, що є характерними, наприклад, для промислових будівель, має своїм мінімумом величину, яка є близькою до  $\tau_{min} = 0,001$  с [16]. Реакція пружної системи на короточасне навантаження залежить від відношення  $\tau$  до найменшого періоду власних коливань системи, що враховується  $T_n$ . Якщо  $\tau/T_n \leq 0,1$ , тоді імпульс сили можна вважати миттєвим, а реакцію системи такою, що залежить тільки від величини імпульсу. При  $\tau/T_n > 0,1$  реакція системи залежить від усіх трьох параметрів навантаження. Якщо  $\tau/T_1 > 2,5$ , де  $T_1$  – основний період власних коливань системи, тоді такі навантаження вже втрачають характер імпульсу.

З трьох параметрів імпульсу вирішальний вплив на реакцію системи справляють його величина та тривалість; форма ж імпульсу має другорядний вплив [16].

Методика дослідження нестационарних коливань оболонок від дії короточасних навантажень ґрунтується на застосуванні до розроблених в [1, 2] скінченноелементних моделей оболонок неоднорідної структури редукованих моделей за методом базисних вузлів [9].

Під оболонкою неоднорідної структури (або неоднорідною оболонкою) у роботі розуміється оболонка, що має: 1) геометричні особливості за товщиною у вигляді ділянок ступінчасто-змінної та гладко-змінної товщини зі зламами серединної поверхні та отворами; 2) різні умови закріплення контуру на різних ділянках; 3) неоднорідні за планом навантаження.

Методика [1, 2], що використовується у роботі, базується на співвідношеннях тривимірної теорії термопружності з використанням апарата тензорного числення, геометрично нелінійному формулюванні задачі в приростах і застосуванні моментної схеми скінченних елементів (МССЕ). При розробці методу використана модель лінійно-пружного суцільного середовища, властивості якого відповідають узагальненому закону Дюамеля–Неймана, при великих переміщеннях і малих деформаціях. Метод [1, 2] призначений для чисельного дослідження статичних процесів геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та закритичної поведінки широкого класу тонких оболонок при термосилових навантаженнях. Моделювання неоднорідної оболонки реалізується модифікованим універсальним просторовим скінченним елементом (СЕ), який, за рахунок введених додаткових змінних параметрів, може бути ексцентрично розташованим відносно серединної поверхні обшивки та змінювати свої розміри в напрямку товщини.

При побудові скінченноелементної моделі оболонки (СЕМО) тонка оболонка розглядається як тривимірне тіло, яке моделюється за товщиною одним ізопараметричним просторовим СЕ з полілінійними функціями форми. Особливості НДС тонкої неоднорідною оболонки враховані використанням двох неklasичних гіпотез: про сталість нормальних напружень обтиснення волокон шару по товщині та деформівної прямиї в напрямку товщини. Застосування останньої кінематичної гіпотези дозволило виконати стикування елементів обшивки і її ділянок з геометричними особливостями без порушення нерозривності за координатами і переміщеннями. На базі універсального СЕ розроблена єдина розрахункова модель, що враховує геометричні особливості конструктивних елементів неоднорідної оболонки: обшивку змінної товщини, ребра і накладки, виїмки, канали й отвори, злами серединної поверхні, тощо.

У роботі побудова редукованої моделі СЕМО (підхід, що зазвичай використовується при розв'язанні задач динаміки) виконується із застосуванням методу базисних вузлів [9, 17], який не пов'язаний зі способом дискретизації вихідної задачі. Суть методу, що набув розвитку стосовно скінченноелементної моделі оболонкової конструкції неоднорідної структури, докладно описаний у [9]. Слід зазначити, що розв'язок задачі побудовано без урахування сил опору. Загалом при дослідженні нестационарних коливань на значних проміжках по часовій

координаті необхідно до вихідної математичної моделі залучати складові, які приводять до згасання коливань. Оскільки демпфірування не враховується, тому розроблена методика дозволяє адекватно досліджувати тільки початковий процес нестационарних коливань.

Вивчення поведінки пружної оболонки при дії короткочасного навантаження вважається повним, якщо в дослідженні розглядаються великі переміщення з позицій геометрично нелінійної теорії. Але дослідження початкової стадії перехідного процесу може бути виконано на основі відповідних лінеаризованих співвідношень [8].

Таким чином, методика є ефективним хоча і наближеним засобом, що дозволяє зробити оцінку параметрів нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасного навантаження.

**2. Чисельна методика дослідження пружних оболонок від дії нестационарних динамічних навантажень з використанням редукованих моделей.** Побудова рівнянь руху скінченноелементної моделі оболонки виконується на основі принципу можливих переміщень у поєднанні з принципом Д'Аламбера [4]. При скінченноелементному формулюванні динамічної задачі у формі методу переміщень зазвичай після лінеаризації вихідних співвідношень приходимо до розв'язувальної системи рівнянь у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку [7-9]

$$[M]\{\overset{t}{\ddot{q}}\} + [K]\{\overset{t}{q}\} - \{\overset{t}{P}\} = 0, \quad (1)$$

де  $\{u\}$ ,  $\{\dot{u}\}$  –  $N$ -вимірні вектори узагальнених переміщень і прискорень вузлів дискретної моделі конструкції ( $N$  – загальне число ступенів свободи моделі);  $[M]$  – узгоджена матриця мас усієї моделі конструкції, вона характеризує інерційні властивості оболонки;  $[K]$  – матриця жорсткості СЕМО;  $\{\overset{t}{P}\}$  – вектор узагальнених вузлових сил; верхній лівий значок « $t$ » показує залежність векторів від часу.

Для того щоб розв'язок системи (1) мав сенс, необхідно задати початкові умови, які повинні визначати у початковий момент часу  $t = t_0$  (без втрати загальності – у нульовий момент часу  $t = 0$ ) поле переміщень  $\{^0u\}$  і швидкостей  $\{^0\dot{u}\}$ , тобто

$$\{u(t)\}|_{t=t_0} = \{^0u\}, \quad \{\dot{u}(t)\}|_{t=t_0} = \{^0\dot{u}\}. \quad (2)$$

Методика дослідження нестационарних коливань оболонок від дії короткочасних навантажень базується на застосуванні редукованих моделей, число ступенів свободи яких істотно менше ніж вихідної дискретної скінченноелементної моделі оболонки, але при цьому нижча частина спектра редукованих частот вихідної і редукованої моделей збігаються. Редукована система розв'язувальних рівнянь, що отримана методом базисних вузлів [9], має вигляд

$$[\tilde{M}]\{\dot{q}\} + [\tilde{K}]\{q\} - \{\tilde{P}\} = 0, \quad (3)$$

де

$$[\tilde{M}] = [U]^T [M][U], \quad (4)$$

$$[\tilde{K}] = [U]^T [K][U], \quad (5)$$

$$\{\tilde{P}\} = [U]^T \{P\}, \quad (6)$$

відповідно матриці мас і жорсткості, які характеризують рух редукованої моделі, а також вектор узагальнених сил для нової моделі. Правий верхній значок « $T$ » означає транспоновану матрицю.  $[U]$  – матриця перетворень, яка встановлює зв'язок між переміщеннями вихідної СЕМО  $\{u\}$  та новими невідомими (що мають назву – нові узагальнені координати) редукованої СЕМО  $\{q\}$ . Цей зв'язок визначається за формулою

$$\{u^k\} = [U_{kr}]\{q^r\}, \quad k = \overline{1, N}, \quad r = \overline{1, \Omega}, \quad (7)$$

де  $N$  і  $\Omega$  – число ступенів свободи вихідної та редукованої моделей.

Відповідно до (2) невідомі шукані функції  $\{q\}$  мають задовольняти початковим умовам при  $t = t_0$

$$\{q\}_{t=t_0} = \{q_0\}, \quad \{\dot{q}\}_{t=t_0} = \{\dot{q}_0\}, \quad (8)$$

або, не втрачаючи загальності при  $t = 0$

$$\{q\}_{t=0} = \{q_0\}, \quad \{\dot{q}\}_{t=0} = \{\dot{q}_0\}. \quad (8')$$

За нові змінні (нові узагальнені координати)  $\{q\}$  приймаються переміщення деякої сукупності вузлів вихідної СЕМО, що довільним чином розташовані у сітковій області моделі (тобто довільним чином виділені із повного набору вузлів моделі). Ці вузли називаються базисними (або опорними) вузлами редукованої СЕМО. Таким чином, згідно з методом базисних вузлів число ступенів свободи  $\Omega$  редукованої моделі відповідає числу переміщень тільки заданої (спеціально вибраної) сукупності базисних вузлів, а число компонент базисних векторів, що входять до складу матриці перетворень  $[U]$  у (7), збігається з числом ступенів свободи повної СЕМО. Отже, кількість рядків матриці перетворень  $[U]$  дорівнює числу ступенів свободи вихідної СЕМО  $N$ , а кількість стовпчиків – кількості узагальнених координат редукованої моделі  $\Omega$ . Таким чином, побудова редукованої моделі виконується без погіршення просторової апроксимації вихідної СЕМО. Методика побудови матриці перетворень  $[U]$  докладно описана в [9].

За своєю суттю, матричне рівняння (3) є системою звичайних диференціальних рівнянь за часовою координатою. Ця система є зв'язаною, і тому одним із варіантів побудови її загального розв'язку, що



визначає поведінку редукованої моделі за часом, полягає в перетворенні зв'язаної системи диференціальних рівнянь до незв'язаної. Це можливо, оскільки матриці мас  $[\tilde{M}]$  і жорсткості  $[\tilde{K}]$  в співвідношенні (3) є симетричними та додатно-визначеними величинами, а також є редукованими завдяки застосуванню методу базисних вузлів та характеризуються невеликою розмірністю, на відміну від відповідних матриць вихідної СЕМО.

Через те, що матриця мас  $[\tilde{M}]$  є додатно-визначеною, тому існує корінь з цієї матриці. Оскільки матриця мас, що використовується в методі, є узгодженою, яка має блочну структуру і не є діагональною [18], тому знаходження  $\sqrt{[\tilde{M}]}$ , виконується за наступним алгоритмом.

Спочатку знаходяться нормовані власні вектори  $\{\varphi_i^{\tilde{M}}\}$  та власні числа  $\{\lambda_i^{\tilde{M}}\}$  матриці мас  $[\tilde{M}]$ , які розташовуються у зростаючому порядку, починаючи з меншого власного числа. З власних векторів матриці  $[\tilde{M}]$  складається матриця  $[S^{\tilde{M}}] = \{[\varphi_1^{\tilde{M}}] \dots [\varphi_r^{\tilde{M}}] \dots [\varphi_\Omega^{\tilde{M}}]\}$ , яка є ортогональною. Завдяки цьому обернена і транспонована матриці збігаються

$$[S^{\tilde{M}}]^T = [S^{\tilde{M}}]^{-1} \text{ або } [S^{\tilde{M}}] \cdot [S^{\tilde{M}}]^T = [I], \quad (9)$$

де  $[I]$  – одинична матриця.

Далі матрицю  $[\tilde{M}]$  приводимо до діагонального вигляду [19]

$$[S^{\tilde{M}}]^T [\tilde{M}] [S^{\tilde{M}}] = \text{diag}[\lambda_1^{\tilde{M}} \quad \dots \quad \lambda_i^{\tilde{M}} \quad \dots \quad \lambda_\Omega^{\tilde{M}}] = [M^*] \quad (10)$$

і звідси знаходимо

$$\sqrt{[M^*]} = \text{diag}[\sqrt{\lambda_1^{\tilde{M}}} \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_i^{\tilde{M}}} \quad \dots \quad \sqrt{\lambda_\Omega^{\tilde{M}}}] \quad (11)$$

Квадратний корінь з редукованої матриці мас визначається співвідношенням

$$\sqrt{[\tilde{M}]} = [S^{\tilde{M}}]^T \sqrt{[M^*]} [S^{\tilde{M}}]. \quad (12)$$

Побудована у такий спосіб матриця  $\sqrt{[\tilde{M}]}$  є основою для подальшого перетворення динамічних рівнянь редукованої моделі (3). Наступні кроки такі.

*Крок перший.* Подаючи матрицю  $[\tilde{M}]$  у вигляді  $[\tilde{M}] = \sqrt{[\tilde{M}]} \cdot \sqrt{[\tilde{M}]}$ , множимо ліву і праву частини (3) ліворуч на  $(\sqrt{[\tilde{M}]})^{-1}$

$$(\sqrt{[\tilde{M}]})^{-1} \left[ \sqrt{[\tilde{M}]} \cdot \sqrt{[\tilde{M}]} \{ {}^t \ddot{q} \} + [\tilde{K}] \{ {}^t q \} \right] = (\sqrt{[\tilde{M}]})^{-1} \{ {}^t \tilde{P} \}.$$

Оскільки  $\left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \cdot \sqrt{[\tilde{M}]} = [I]$  маємо

$$\sqrt{[\tilde{M}]} \frac{d^2 \{^t q\}}{dt^2} = -\left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} [\tilde{K}] \{^t q\} + \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \{^t \tilde{P}\}. \quad (13)$$

Виконаємо тотожне перетворення в правій частині (13) та отримаємо

$$\sqrt{[\tilde{M}]} \frac{d^2 \{^t q\}}{dt^2} = -\left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} [\tilde{K}] \left(\left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \cdot \sqrt{[\tilde{M}]}\right) \{^t q\} + \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \{^t \tilde{P}\}. \quad (14)$$

Введемо позначення

$$\{^t q^*\} = \sqrt{[\tilde{M}]} \{^t q\}, \quad (15)$$

$$[K^*] = \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} [\tilde{K}] \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1}, \quad (16)$$

$$\{^t P^*\} = \left(\sqrt{[\tilde{M}]}\right)^{-1} \{^t \tilde{P}\}. \quad (17)$$

і подамо рівняння (14) з урахуванням (15)-(17) у канонічному вигляді

$$\frac{d^2 \{^t q^*\}}{dt^2} = -[K^*] \{^t q^*\} + \{^t P^*\}. \quad (18)$$

На другому кроці приведемо систему зв'язаних диференціальних рівнянь до системи незв'язаних рівнянь. Спочатку подамо матрицю  $[K^*]$  у діагональному вигляді. Для цього знаходимо власні числа  $\{\lambda_i^{K^*}\}$  та нормовані власні вектори матриці  $[K^*]$ . Як і вище утворимо матрицю  $[S^{K^*}]$ , стовпчиками якої є компоненти знайдених власних векторів.

Оскільки матриця  $[K^*]$  є симетричною, тому її власні вектори взаємно ортогональні. А через те, що ці вектори є нормованими, тому матриця  $[S^{K^*}]$  є ортогональною, а обернена до неї збігається з транспонованою  $[S^{K^*}]^{-1} = [S^{K^*}]^T$ .

Зв'язана система звичайних диференціальних рівнянь (18) за допомогою матриці  $[S^{K^*}]$  може бути приведена до незв'язаної системи окремих диференціальних рівнянь у результаті наступних дій.

Помножимо співвідношення (18) зліва на  $[S^{K^*}]^T$

$$[S^{K^*}]^T \frac{d^2 \{^t q^*\}}{dt^2} = -[S^{K^*}]^T [K^*] \{^t q^*\} + [S^{K^*}]^T \{^t P^*\}. \quad (19)$$

Виконаємо тотожне перетворення в правій частині (19), враховуючи, що

$$[S^{K^*}]^T = [S^{K^*}]^{-1} \text{ або } [S^{K^*}] \cdot [S^{K^*}]^T = [I]. \quad (20)$$

Тоді маємо

$$[S^{K^*}]^T \frac{d^2 \{ {}^t q^* \}}{dt^2} = -[S^{K^*}]^T [K^*] \left( [S^{K^*}] \cdot [S^{K^*}]^T \right) \{ {}^t q^* \} + [S^{K^*}]^T \{ {}^t P^* \}. \quad (21)$$

Враховуючи в (21), що

$$[S^{K^*}]^T [K^*] [S^{K^*}] = [\Lambda], \text{ де } [\Lambda] = \text{diag}[\lambda_1^{K^*} \quad \dots \quad \lambda_i^{K^*} \quad \dots \quad \lambda_\Omega^{K^*}],$$

та вводячи позначення

$$\{ {}^t q^{**} \} = [S^{K^*}]^T \{ {}^t q^* \}, \quad (22)$$

$$\{ {}^t P^{**} \} = [S^{K^*}]^T \{ {}^t P^* \}. \quad (23)$$

остаточно отримаємо співвідношення

$$\frac{d^2 \{ {}^t q^{**} \}}{dt^2} + \lambda_i^{K^*} \{ {}^t q^{**} \} = \{ {}^t P^{**} \}, \quad i = \overline{1, \Omega}, \quad (24)$$

які є системою  $\Omega$  незв'язаних диференціальних рівнянь другого порядку.

Аналогічні перетворення виконуються з заданими початковими умовами (8). У результаті отримаємо початкові умови для  $\{ {}^t q^{**} \}$  та їхніх похідних у момент часу  $t = t_0$

$$\{ {}^{t=t_0} q^{**} \} = \{ {}^{t_0} q^{**} \}, \quad \{ {}^{t=t_0} \dot{q}^{**} \} = \{ {}^{t_0} \dot{q}^{**} \}. \quad (25)$$

Це дає  $\Omega$  окремих задач для звичайних диференціальних рівнянь другого порядку з початковими умовами, тобто  $\Omega$  задач Коші (24-25).

*Крок третій.* Розв'язання кожної окремої задачі Коші виконується за методом Рунге-Кутти четвертого порядку точності. Враховуючи, що метод Рунге-Кутти орієнтований на розв'язання диференціальних рівнянь першого порядку, подамо систему (24) у вигляді  $2\Omega$  рівнянь, вводячи нові змінні – вузлові швидкості  $\{ {}^t v^{**} \}$ ,

$$\begin{cases} \frac{d \{ {}^t q_j^{**} \}}{dt} = \{ {}^t v_j^{**} \}, \\ \frac{d \{ {}^t v_i^{**} \}}{dt} = -\lambda_{(i)}^{K^*} \{ {}^t q_i^{**} \} = \{ {}^t P_i^{**} \}, \end{cases} \quad j = \overline{1, \Omega}; \quad i = \overline{\Omega+1, 2\Omega}. \quad (26)$$

При цьому початкові умови (25) при  $t = t_0$  набувають вигляду

$$\begin{cases} \{ {}^{t=\tau} q_i^{**} \} = \{ {}^\tau q_i^{**} \} - \text{початкове переміщення,} \\ \{ {}^{t=\tau} v_j^{**} \} = \{ {}^\tau v_j^{**} \} - \text{початкова швидкість.} \end{cases} \quad (27)$$

У результаті інтегрування  $\Omega$  окремих систем з двох рівнянь (26) за методом Рунге-Кутти знаходимо значення компонент векторів переміщень  $\{ {}^t q_i^{**} \}$  і швидкостей  $\{ {}^t v_j^{**} \}$ .

*Крок четвертий.* Для кожного моменту часу після знаходження  $\Omega$  розв'язків відповідних задач Коші виконується зворотній перехід за

формулами (22, 15) від знайденого переміщення  $\{^t q^{**}\}$  до переміщення  $\{^t q^*\}$  та від обчисленого  $\{^t q^*\}$  до переміщення  $\{^t q\}$ , що визначає шуканий розв'язок.

Таким чином, із залежностей (15, 22), на кожному кроці за часом, враховуючи (20), послідовно знаходимо шукані переміщення (нові узагальнені координати) редукованої СЕМО

$$\{^t q^*\} = \{^t q^{**}\} [S^{K^*}]^{-1}, \quad (28)$$

$$\{^t q\} = \{^t q^*\} \sqrt{[\tilde{M}]}^{-1}. \quad (29)$$

Підставляючи знайдений розв'язок (29) у формулу перетворень (7), знаходимо переміщення вузлів вихідної СЕМО, за якими визначається напружено-деформований стан неоднорідної оболонки в момент часу, що розглядається.

**3. Результати розрахунку та аналіз розв'язків.** Дослідження нестационарних коливань тонкостінної конструкції від дії короткочасного навантаження проведено на прикладі шарнірно опертих балок (рис. 3).

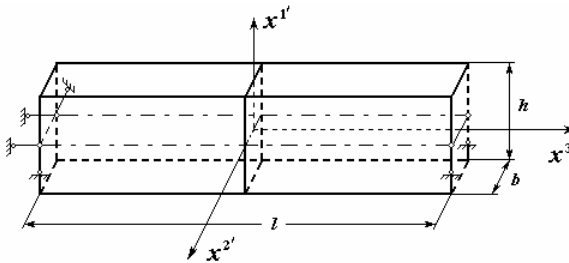


Рис. 3

Вихідні дані взяті відповідно до [21]. Геометричні характеристики балки: довжина  $l = 800$  см, ширина  $b = 40$  см та висота перерізу  $h = 80$  см; характеристики матеріалу (бетон марки М100): модуль пружності  $E = 3 \cdot 10^7$  кН/м<sup>2</sup>, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,2$ , питома густина  $\rho = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; інтенсивність імпульсу  $P_0 = 8 \cdot 10^8$  Н, час його дії  $\tau = 1 \cdot 10^{-5}$  с.

Для даних одновимірних елементів конструкцій за точні вважалися результати, для яких у [20, 21] балки моделювалися як стержні, і для яких у [20] наведено аналітичні розв'язки.

У роботі моделювання балок виконувалося просторовим універсальним СЕ, який дозволяє розглядати тонкі оболонкові конструкції як тривимірні тіла [1, 2]. Згідно з вихідними даними балка при апроксимації просторовим СЕ умовно відповідає оболонці середньої

товщини, оскільки  $h/l = 10^{-1}$ , що є верхньою границею можливостей методики.

Виходячи зі складного виду деформування балок [20], за розрахункові приймалися скінченноелементні моделі балки з сітками  $2 \times 20$ ,  $2 \times 32$  та  $2 \times 40$  СЕ. При побудові редукованої моделі задачі використовувалося 9, 15 та 19 базисних вузлів. На розрахунковій схемі (рис. 4) для сітки  $2 \times 20$  СЕ показано вибір опорних точок методу базисних вузлів в площині серединної поверхні  $x^2 x^3$ .

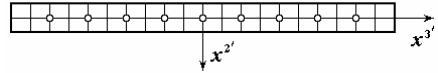


Рис. 4. СЕМО балки ( $2 \times 20$  СЕ) та вибрані базисні вузли

Відслідковувалися компоненти вектора переміщень у центрі балки на заданому часовому інтервалі у вигляді діаграм «амплітуда  $u^I$  – час  $t$ » (« $u^I - t$ ») та форми деформування у характерні моменти часу. Переміщення  $u^I$  є вузловим переміщенням на серединній поверхні балки.

**3.1.** Розглядаються нестационарні коливання балки (рис. 3) від дії рівномірно розподіленого по її довжині миттєвого імпульсу  ${}^t q$  прямокутної форми.

На всіх ділянках діаграми «амплітуда – час» (рис. 5, а) спостерігається гарний збіг розв'язків при усіх сітках. Порівняння діаграми « $u^I - t$ », що отримана за МССЕ, з результатами роботи [21] (рис. 5, б) показує практично повний їх збіг із незначним розходженням у верхній точці. Максимальний прогин  $u_{max}^I = -0,1048$  см досягається при  $t = 0,0114$  с (рис. 5, а), що гарно збігається з розв'язками, отриманими в [20, 21]. Розбіжність з теоретичним розв'язком  $u_{max}^I = -0,1032$  см [20] складає +1,55%, з розрахунком за програмним комплексом Scad [21]  $u_{max}^I = -0,102998$  см становить +1,75%.

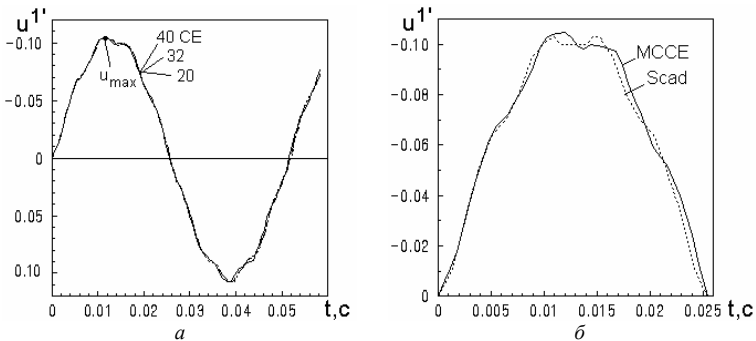


Рис. 5. Діаграми « $u^I - t$ »: (а) для різних сіток СЕ; (б) порівняння з розв'язком [21]

Для обґрунтування збіжності отримуваних розв'язків були проаналізовані для різних сіток епюри прогинів по довжині балки у різні моменти часу.

Маємо гарний збіг розв'язків на інтервалі дії імпульсного навантаження: на середині  $t = \tau/2$  (рис. 6, а) та на кінці  $t = \tau$  (рис. 6, б) проміжку часу його дії. На цьому проміжку  $t \in [0, \tau]$  спостерігається крайовий ефект переміщень балки біля його кінців. Для першої більш рідкої сітки ефект хвильової деформації поширюється майже на всю довжину балки. Як достатню для СЕМО балки можна взяти сітку  $2 \times 32$  СЕ.

На рис. 6, в наведено епюри прогинів балки в момент часу  $t = t_{u_{max}}$ , коли амплітуда коливань досягає максимуму  $u'_{max}$  (рис. 5, а). Маємо практично повний збіг форм, що отримані за MCCE та Scad [21].

Виконане дослідження підтверджує гарну збіжність і достатньо високу точність розв'язку, що побудований за запропонованою методикою.

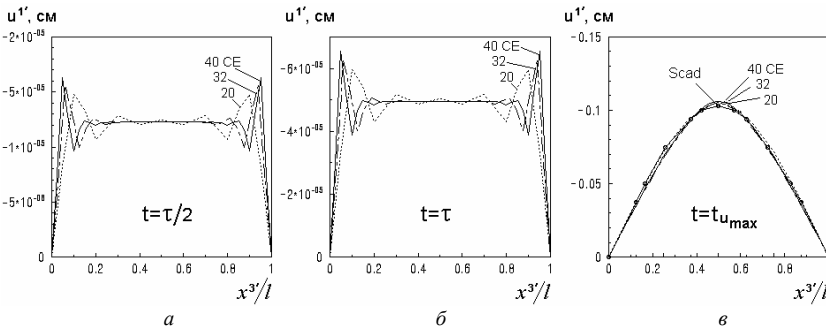


Рис. 6. Епюри прогинів у різні моменти навантаження  $t q$

**3.2.** Розглядається задача про нестационарні коливання балки (рис. 3) від дії зосередженого миттєвого імпульсу  $t p$  прямокутної форми, що прикладений в середині її прольоту.

Діаграми « $u' - t$ », що відповідають випадку дії зосередженого імпульсу (рис. 7, а), мають більш складний вигляд, ніж при дії рівномірно розподіленого. Маємо досить гарний збіг розв'язків для усіх сіток.

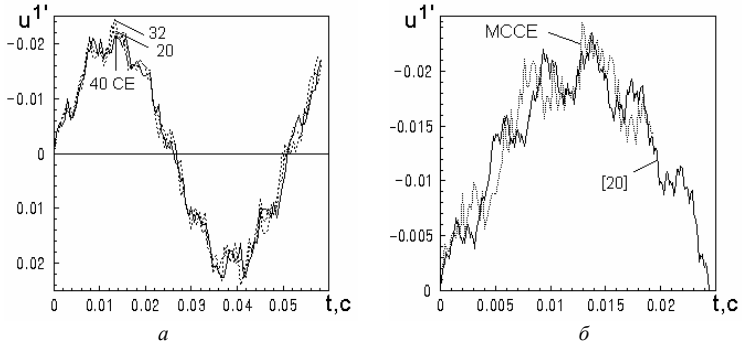


Рис. 7. Діаграми « $u' - t$ »: (а) для різних сіток СЕ; (б) порівняння з розв'язком [20]

Порівняння діаграми «амплітуда – час», що отримана з використанням МССЕ, з результатами роботи [20] (рис. 7, б) показує задовільний збіг розв'язків. Максимальний прогин  $u'_{max} = -0,02143$  см досягається при  $t = 0,0132$  с (рис. 7, а), що узгоджується з розв'язком  $u'_{max} = -0,02468$  см, отриманим аналітично в [20]. Розбіжність розв'язків складає -13,17%. Незначну розбіжність діаграм можна віднести до особливостей застосування уточненої методики МССЕ [1, 2], що використовує просторові скінченні елементи і розглядає балку як тривимірне тіло, у той час, коли в [20] балка розглядалась як стержень.

Аналіз форм деформування балки для різних сіток показав гарний збіг розв'язків у різні моменти часу (рис. 8). На проміжку  $t \in [0, \tau]$  дії імпульсного навантаження в точках  $t = \tau/2$  (рис. 8, а) та  $t = \tau$  (рис. 8, б) спостерігається деформування балки в центральній частині в районі дії імпульсу. Як і в попередньому випадку маємо гарний збіг розв'язків для СЕМО балки з сітками  $2 \times 32$  СЕ та  $2 \times 40$  СЕ. Для моменту часу  $t = t_{u_{max}}$ , коли амплітуда коливань балки досягає максимуму  $u'_{max}$ , форма деформування набуває більш простого вигляду (рис. 8, в). При згущенні сітки  $2 \times 40$  СЕ епюра характеризується незначними хвилями. Порівняння епюр з результатами роботи [20] показало гарний збіг розв'язків. Більш ускладнений вигляд епюри, яка отримана за МССЕ, можна пояснити використанням просторового СЕ [1, 2] для апроксимації балки. Для цього випадку навантаження за достатню можна прийняти сітку  $2 \times 40$  СЕ.

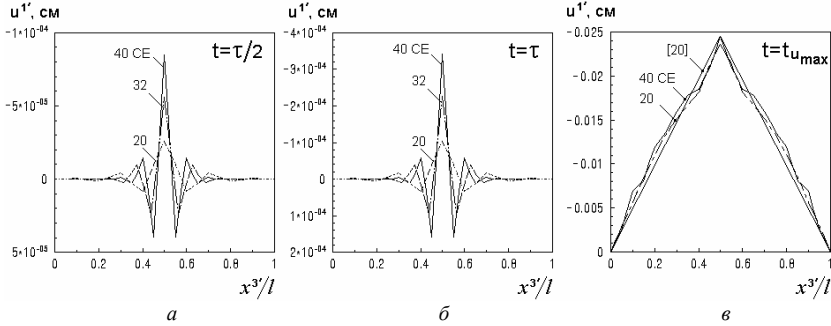


Рис. 8. Епюри прогинів у різні моменти миттєвого навантаження  $t_p$

Наведені результати підтверджують ефективність побудованої методики дослідження нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень.

На тестових задачах продемонстровано, що навіть для СЕ, який відповідає оболонці середньої товщини, що є верхньою границею можливостей просторового скінченного елемента [1, 2], можливе застосування розробленого методу для оцінки впливу короткочасного навантаження на поведінку тонкостінної конструкції.

**Висновки.** На основі розробленої авторами скінченноелементної моделі тонкої пружної неоднорідної оболонки та створеної на її базі для задач динаміки редукованої моделі за методом базисних вузлів побудовано алгоритм розв'язання задач про нестационарні коливання оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень.

Застосування методу базисних вузлів дозволило розробити простий та ефективний алгоритм розв'язування даної задачі. Використання невеликої кількості базисних вузлів при побудові редукованої моделі оболонки забезпечило можливість переходу від зв'язаної системи диференціальних рівнянь, що описує рух системи, до системи незв'язаних рівнянь, розв'язок якої легко знаходиться за добре розробленим чисельним методом Рунге–Кутти.

Розроблений алгоритм застосовано до розрахунку балок сталого поперечного перерізу на дію різних імпульсних навантажень. Проведені дослідження підтверджують гарну збіжність і достатньо високу точність розв'язку, що побудований за запропонованою методикою.



## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелинейное деформирование та стійкість пружних оболочок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 316 с.
2. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей Н.А.* Нелинейное деформирование и устойчивость упругих оболочек неоднородной структуры: Модели, методы, алгоритмы, малоизученные и новые задачи. – М.: Книжный дом «ЛИБРИКОМ», 2013. – 336 с.
3. *Gotsulyak E.A., Sivanov A.G.* Stability and Nonlinear deformation of Cylindrical Grids // International Applied Mechanics, 2004. – Vol. 40, № 4. – Pp. 426-431.
4. *Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф.* Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 392 с.
5. *Filatov G.V.* Optimal Design of Shells Subjected to Impulsive Loading // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, № 8. – Pp. 917-923
6. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanic. – 2009. – Vol. 45, № 3. – Pp. 245-271.
7. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Легостаев А.Д.* Стійкість і власні коливання неоднорідних оболонок з урахуванням напруженого стану // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 95. – С.96-113.
8. *Чибіряков В.К., Легостаев А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.* Методика дослідження оболонок від дії нестационарних динамічних впливів з використанням редукованих моделей // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2015. – Вип. 96. – С. 36-47.
9. *Кривенко О.П., Легостаев А.Д., Гречух Н.А.* Аналіз власних коливань оболонок неоднорідної структури з використанням редукованих скінченноелементних моделей // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 98. – С. 72-88.
10. *Хайрнасов К.З.* Моделирование поведения кольцевой пластинки при импульсном нагружении // Горный информационно-аналитический бюллетень (научно-технический журнал), Москва: "Горная книга", 2009. –№7. – С. 52-63.
11. Идентификация нагрузок при импульсном деформировании тел. Монография. В 2-х частях. Часть 1 / *Е.Г.Янютин, Д.И.Богдан, Н.И.Воропай, Г.А.Гнатенко, В.Т.Гришакин.* – Харьков: Изд-во ХНАДУ, 2010. – 180 с.
12. *Шульженко Н.Г., Гонтаровский П.П.* Реакция оболочечных элементов космических аппаратов на импульсное воздействие // Авиационно-космическая техника и технология, 2013, № 9 (106) – С. 53-58.
13. *Бахтиева Л.У., Тазюков Ф.Х.* Решение задачи устойчивости тонкой оболочки при импульсном нагружении // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. Науки. – 2014. – Том 156, книга 1. – С. 5–11.
14. *Чернобрыво М.В., Светличная С.Д., Комяк В.М.* Моделирование динамических деформационных процессов в защитных контейнерах при детонационном воздействии // Проблемы надзвичайних ситуацій. – 2014. – Вип. 19. – С. 162-169.
15. *Лаврентьев М. А., Ишлинский А.Ю.* Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. – 1949. – 64, №6. – С. 779–782.
16. Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б.Г.Коренева, И.М.Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 511 с.
17. *Кислюк В.Н., Легостаев А.Д.* Реализация метода конечных элементов в задачах исследования свободных колебаний оболочек и пластин // Опір матеріалів і теорія споруд, – Київ: Будівельник, 1974. – Вип. 27. – С. 24-32.
18. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Матрица мас модифікованого просторового скінченного елемента неоднорідної оболонки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2013. – Вип. 91. – С. 114-125.
19. *Баженов В.А., Ворона Ю.В.* Будівельна механіка. Динаміка: Підручник. – К.: Каравела, 2014. – 288 с.

20. Рабинович И.М., Синицын А.П., Лужин О.В., Теренин Б.М. Расчет сооружений на импульсивные воздействия. – М.: Из-во по строительству, 1970. – 303 с.
21. ScadSoft: Свободно опертая балка с распределенной массой под действием равномерно распределенного мгновенного импульса (удар балки о неподвижные опоры) [Электронный ресурс]. – Режим доступа: [http://scadsoft.com/tests\\_scad/index/test/68](http://scadsoft.com/tests_scad/index/test/68)

## REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Solovei M.O.* Nelineine deformuvannia ta stiikist pruzhnykh obolonok neodnorodnoi struktury (Nonlinear deformation and stability of elastic shells with inhomogeneous structure). – К.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 s.
2. *Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovey N.A.* Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost uprugih obolochek neodnorodnoy struktury: Modeli, metody, algoritmy, maloizuchennyye i novyye zadachi (Nonlinear deformation and stability of elastic shells with inhomogeneous structures: Models, methods, algorithms, poorly-studied and new problems). – М.: Knizhnyy dom «LIBRIKOM», 2013. – 336 s.
3. *Gotsulyak E.A., Sivanov A.G.* Stability and Nonlinear deformation of Cylindrical Grids // International Applied Mechanics, 2004. – Vol. 40, № 4. – Pp. 426-431.
4. *Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabudinov A.F.* Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy (Finite element method in statics and dynamics of thin-walled structures). – М.: FIZMATLIT, 2006. - 392 s.
5. *Filatov G.V.* Optimal Design of Shells Subjected to Impulsive Loading // International Applied Mechanics. – 2005. – Vol. 41, № 8. – Pp. 917-923
6. *Zarutskii V.A., Lugovoi P.Z., Meish V.F.* Dynamic problems for and stress-strain state of inhomogeneous shell structures under stationary and nonstationary loads // International Applied Mechanic. – 2009. – Vol. 45, № 3. – Pp. 245-271.
7. *Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Lehostaiev A.D.* Stiikist i vlasni kolyvannia neodnorodnykh obolonok z urakhuvanniam napruzhenoho stanu (Stability and natural vibrations of inhomogeneous shells taking into account the stress state) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – К.: KNUBA, 2015. – Vyp. 95. – S.96-113.
8. *Chybirakov V.K., Lehostaiev A.D., Hrechukh N.A., Yakovenko O.O.* Metodyka doslidzhennia obolonok vid dii nestatsionarnykh dynamichnykh vplyviv z vykorystanniam redukovanykh modelei (The method of research of the shells at the action of non-stationary dynamic loads using reduced models) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – К.: KNUBA, 2015. – Vyp. 96. – S. 36-47.
9. *Kryvenko O.P., Lehostaiev A.D., Hrechukh N.A.* Analiz vlasnykh kolyvan obolonok neodnorodnoi struktury z vykorystanniam redukovanykh skinchennoelementnykh modelei (Analysis of natural vibrations of shells with inhomogeneous structure using reduced finite element models) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – К.: KNUBA, 2017. – Vyp. 98. – S. 72-88.
10. *Hayrnasov K.Z.* Modelirovanie povedeniya koltsevoy plastinki pri impulsnom nagruzenii (Simulation of the behavior of an annular plate under impulse loading) // Gornyy informatsionno-analiticheskiy byulleten (nauchno-tehnicheskii zhurnal), Moskva: "Gornaya kniga", 2009. – №7. – S. 52-63.
11. Identifikatsiya nagruzok pri impulsnom deformirovanii tel. Monografiya. V 2-h chastyah. Chast 1 (Identification of loads during pulsed deformation of bodies. Monograph. in 2 parts. Part 1) / *E.G.Yanyutin, D.I.Bogdan, N.I.Voropay, G.A.Gnatenko, V.T.Grishakin.* – Harkov: Izd-vo HNADU, 2010. – 180 s.
12. *Shulzhenko N.G., Gontarovskiy P.P.* Reaktsiya obolochechnykh elementov kosmicheskikh apparatov na impulsnoe vozdeystvie (The reaction of the shell elements of space vehicles to the impulse action) // Aviatсионно-kosmicheskaya tehnika i tehnologiya, 2013, № 9 (106) – S. 53-58.

13. *Bahtieva L.U., Tazyukov F.H.* Reshenie zadachi ustoychivosti tonkoy obolochki pri impulsnom nagruzhenii (Solution of the problem of stability of a thin shell under a pulsed loading) // Uchen. zap. Kazan. un-ta. Ser. Fiz.-matem. Nauki. – 2014. – Tom 156, kniga 1. – S. 5–11.
14. *Chernobryivko M.V., Svetlichnaya S.D., Komyak V.M.* Modelirovaniye dinamicheskikh deformatsionnykh protsessov v zaschitnykh konteynerakh pri detonatsionnom vozdeystvii (Modeling of dynamic deformation processes in protective containers under detonation action) // Problemi nadzvichaynykh situatsiy. – 2014. – Vip. 19. – S. 162-169.
15. *Lavrentev M. A., Ishlinskiy A.Yu.* Dinamicheskie formy poteri ustoychivosti uprugih system (Dynamic forms of loss of stability of elastic systems) // Dokl. AN SSSR. – 1949. – 64, №6. – S. 779–782.
16. Spravochnik po dinamike sooruzheniy (Handbook of the dynamics of structures) / Pod red. *B.G.Koreneva, I.M.Rabinovicha.* – M.: Stroyizdat, 1972. – 511 s.
17. *Kislokiy V.N., Legostaev A.D.* Realizatsiya metoda konechnykh elementov v zadachah issledovaniya svobodnykh kolebaniy obolochek i plastin (Realization of the finite element method in problems of analysis free vibrations of shells and plates) // Opir materialiv i teoriia sporud, – Kyiv: Budivelnyk, 1974. – Vyp. 27. – S. 24-32.
18. *Bazhenov V.A., Kryvenko O.P., Solovei M.O.* Matrytsia mas modyfikovanoho prostorovoho skinchennoho elementa neodnorodnoi obolonki (Mass matrix of the modified solid finite element for inhomogeneous shells) // Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2013. – Vyp. 91. – C. 114-125.
19. *Bazhenov V.A., Vorona Yu.V.* Budivelna mekhanika. Dynamika: Pidruchnyk (Structural mechanics. Dynamics. Textbook) – K.: Karavela, 2014. – 288 s.
20. *Rabinovich I.M., Sinitsyn A.P., Luzhin O.V., Terenin B.M.* Raschet sooruzheniy na impulsivnyie vozdeystviya (Calculation of constructions at impulsive effects). – M.: Iz-vo po stroitelstvu, 1970. – 303 s.
21. ScadSoft: Svobodno opertaya balka s raspredelennoy massoy pod deystviem ravnomerno raspredelennoho mgnovennogo impulsa (udar balki o nepodvizhnyie opory) (A simply supported beam with a distributed mass under the action of a uniformly distributed instantaneous pulse (impact of a beam on fixed supports) [Elektroniy resurs]. – Rezhim dostupu [http://scadsoft.com/tests\\_scad/index/test/68](http://scadsoft.com/tests_scad/index/test/68)

*Chybyryakov V.K., Krivenko O.P., Legostaev A.D., Grechukh N.A.*

#### **DEFORMATION OF ELASTIC INHOMOGENEOUS SHELLS UNDER THE ACTION OF NONSTATIONARY DYNAMICAL LOADS**

An algorithm for investigating the nonstationary vibrations of shells with an inhomogeneous structure under the action of short-term dynamic loads is proposed. The technique is based on the finite element model of a thin elastic shell with various geometric features in terms of thickness and on the reduced model for dynamics problems created on its basis.

The method of investigation of elastic inhomogeneous shells is based on the relations of the 3-d theory of thermoelasticity and the use of the moment finite-element scheme. So, a thin shell is considered, by this method, as a three-dimensional body, which is modeled in thickness by one isoparametric solid finite element with multilinear shape functions. The features of the stress-strain state of a thin inhomogeneous shell are taken into account using two nonclassical hypotheses: that the normal stresses in the fibers are constant throughout the thickness of the shell and the nonclassical kinematic hypothesis of deformed straight line in the thickness direction.

The construction of the reduced finite-element model is performed by using the method of basis nodes. The application of the method of basis nodes made it possible to develop a simple and effective algorithm for studying nonstationary oscillations of inhomogeneous shells under the action of short-term dynamic loads. The use of a small number of basic nodes in the construction of a reduced shell model has provided the possibility of a transition from a coupled system of

differential equations describing the motion of the system to a system of unbound equations, the solution of which is easily found in the well-developed Runge-Kutta numerical method.

The efficiency of the developed algorithm is demonstrated by the example of analysis the hinged beams of constant cross section on the action of various impulse loads. Convergence of solutions is investigated and a comparison with theoretical data and results of calculations obtained with the help of the software Scad is made. The conducted studies confirm the good convergence and rather high accuracy of the solution obtained according to the proposed method.

**Keywords:** thin elastic shell, universal solid finite element, model reduced, impulse load.

*Чиби́ряков В.К., Кривенко О.П., Легостаєв А.Д., Гречух Н.А.*

### **ДЕФОРМИРОВАНИЕ УПРУГИХ НЕОДНОРОДНЫХ ОБОЛОЧЕК ПОД ДЕЙСТВИЕМ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК**

Предложен алгоритм исследования нестационарных колебаний оболочек неоднородной структуры при действии кратковременных динамических нагрузок. Методика построена на основе разработанной авторами конечноэлементной модели тонкой упругой оболочки с различными геометрическими особенностями по толщине и созданной на ее базе для задач динамики редуцированной модели. Дано количественное обоснование метода. Выполнено сравнение решений с теоретическими данными и результатами расчетов, полученными в программном комплексе Scad.

**Ключевые слова:** тонкая упругая оболочка, универсальный пространственный конечный элемент, редуцирована модель, импульсная нагрузка.

УДК 539.3

*Чи́бїряков В.К., Кривенко О.П., Легостаєв А.Д., Гречух Н.А.* **Деформування пружних неоднорідних оболонок під дією нестационарних динамічних навантажень** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 99. – С. 123 – 141.

*Запропоновано алгоритм дослідження нестационарних коливань оболонок неоднорідної структури при дії короткочасних динамічних навантажень. Методику побудовано на основі розробленої авторами скінченноелементної моделі тонкої пружної оболонки з різними геометричними особливостями за товщиною і створеної на її базі для задач динаміки редукованої моделі. Дано кількісне обґрунтування методу.*

Табл. 0. Іл. 8. Бібліогр. 21 назв.

UDC 539.3

*Chybiryakov V.K., Krivenko O.P., Legostaev A.D., Grechukh N.A.* **Deformation of elastic inhomogeneous shells under the action of nonstationary dynamical loads** / Opir materialiv i teoriia sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2017. – Issue 99. – P. 123 – 141. – Ukr.

*An algorithm for investigating the nonstationary vibrations of shells with an inhomogeneous structure under the action of short-term dynamic loads is proposed. The technique is based on the finite element model of a thin elastic shell with various geometric features in terms of thickness and on the reduced model for dynamics problems created on its basis. The quantitative justification of the method is given.*

Tabl. 0. Fig. 8. Bibliograf. 21 ref.

УДК 539.3

*Чибирияков В.К., Кривенко О.П., Легостаев А.Д., Гречух Н.А. Деформирование упругих неоднородных оболочек под действием нестационарных динамических нагрузок / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2017. – Вып. 99. – С. 123 – 141. – Укр.*

*Предложен алгоритм исследования нестационарных колебаний оболочек неоднородной структуры при действии кратковременных динамических нагрузок. Методика построена на основе разработанной авторами конечноэлементной модели тонкой упругой оболочки с различными геометрическими особенностями по толщине и созданной на ее базе для задач динамики редуцированной модели. Дано количественное обоснование метода.*

Табл. 0. Ил. 8. Библиогр. 21 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):**

*доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики КНУБА*  
*ЧИБІРЯКОВ Валерій Кузьмич*

**Мобільний тел.:** +38(097) 925-77-96;

*кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА КРИВЕНКО Ольга Петрівна*

**Мобільний тел.:** +38(066) 048-32-77,

**Е-mail:** [olakor@ukr.net](mailto:olakor@ukr.net)

*кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА*  
*ЛЕГОСТАЄВ Анатолій Дмитрович*

**Мобільний тел.:** +38(096) 340-59-18,

**Е-mail:** [anat\\_leg@ukr.net](mailto:anat_leg@ukr.net)

*науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА ГРЕЧУХ Наталія Анатоліївна*

**Мобільний тел.:** +38(097) 426-16-09,

**Е-mail:** [natniism@ukr.net](mailto:natniism@ukr.net)

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури.

**Роб. тел.:** +38(044) 245-48-29.

UDC 539.3

## ANALYSIS OF THE EFFECT OF THE HO CHI MINH CITY TUNNEL SETTLEMENT ON THE ADJACENT BUILDINGS

**Nguyen Anh Tuan**<sup>1</sup>,

PhD, Lecturer, Faculty of Transportation Engineering,

**Tran Duc Chinh**<sup>1,2</sup>,

DSc, Prof.

**Nguyen Thanh Dat**<sup>1</sup>

PhD, Associate Prof.

<sup>1</sup>*Hochiminh City University of Transport, Hochiminh City, Vietnam*

<sup>2</sup>*Academician of ABU Academy, Ukraine*

The paper aims to studying the effect of settlement of the Ho Chi Minh City Tunnel in soft soil condition on the nearby buildings due to tunneling by the Finite Element Method using Plaxis 3D Tunnel.

**Keywords:** Tunnel, soft soil, settlement, Finite Element Method.

### 1. Introduction

Nowadays, the population of the Ho Chi Minh City has grown quickly. The traffic facilities of Ho Chi Minh City therefore have been continually upgraded but they are still weak and cannot satisfy the traffic needs. Therefore, the city needs a modern public passenger transport network to ensure that the citizens can travel quickly, safely and conveniently. Tunneling not only provides high-speed transportation in rush hours but also carries a large number of passengers. Besides, it doesn't cause any pollution so it satisfies the sustainable long-term development of the Ho Chi Minh City.

This is the first time in Vietnam to build the tunnel. Hence, we are lack of experience, technology and construction management. Besides, there are many projects have been built on the ground so the study on the settlement effect of tunnel construction to nearby buildings in the Ho Chi Minh City is very essential. The Ho Chi Minh City Tunnel - part of Ben Thanh - Suoi Tien has been selected for the study of ground surface settlement due to underground tunnel construction and the effect of settlement on the nearby buildings.

### 2. Content

#### 2.1. Project description

Fig. 1 describes the cross section of the Ben Thanh - Suoi Tien Tunnel and the Tunnel balanced construction model by TBM is shown in Fig. 2.

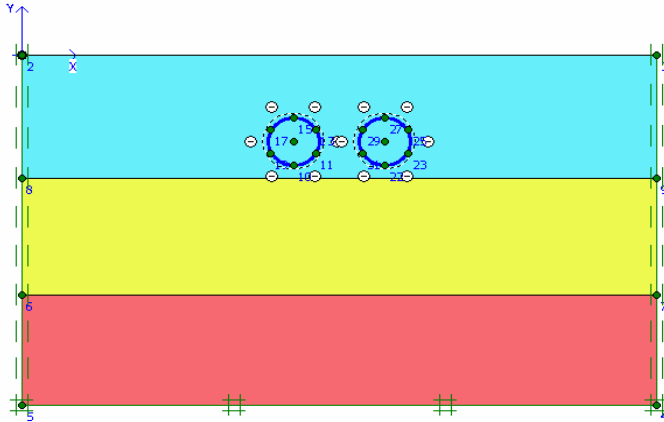


Fig. 1. Cross section of the Ben Thanh - Suoi Tien Tunnel

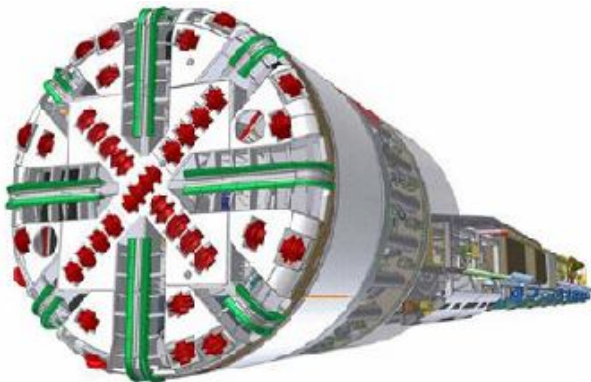


Fig. 2. Tunnel balanced construction model by TBM

**Construction overview:** Ben Thanh - Suoi Tien tunnel route is 19,7 km long. It includes 2,6 km underground tunnel and 17,1 km rail on ground.

**Cross section of tunnel:** Rounded tunnel, Diameter (D) = 6,65m and Thickness (d) = 0,3m.

**Tunnel construction method:** According to the soft soil condition in Ho Chi Minh City, it's believed that the Tunnel Boring Machine (TBM) is the most suitable method to execute the tunnel.

## 2.2. Model of tunnel construction in Plaxis 3D Tunnel

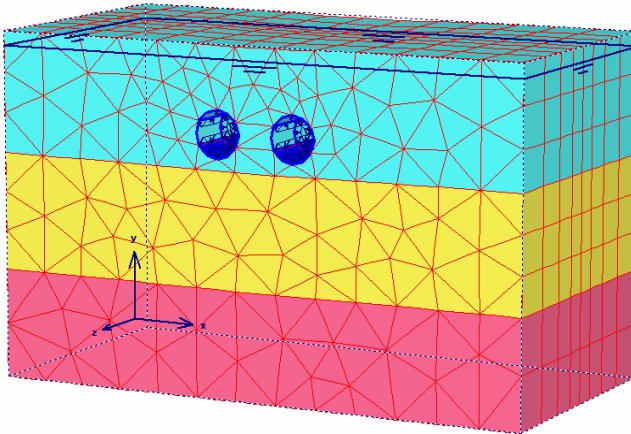
Table 1

Parameters of soil properties

	Layer 1 Organic clay	Layer 2 Clayey sand	Layer 3 Sandy Clay	Unit
Layer's thickness	16.7	16	15	<i>m</i>
Material model	MC	MC	MC	-
Natural density $\gamma_{\text{unsat}}$	15.8	20.2	20.9	$kN/m^3$
Saturation density $\gamma_{\text{sat}}$	16.1	20.4	21.02	$kN/m^3$
Elastic module $E_{\text{ref}}^{50}$	1040	15330	12105	$kN/m^2$
Poisson coefficient $\nu$	0.35	0.27	0.32	-
Cohesive force $c'$	7.3	14.1	80.4	$kN/m^2$
Angel of interior friction $\varphi'$	5.72	27.58	21.3	$^{\circ}$
Permeability $k$	$1.83 \times 10^{-5}$	$0.5 \times 10^{-5}$	$1.36 \times 10^{-5}$	<i>m/s</i>

Plaxis 3D Tunnel program is based on the finite element method. The program can calculate internal forces, analyze stability and deformation of geotechnical constructions. Plaxis 3D Tunnel, has simple interface, allows user to build construction models and provides fairly accurate results.

The soil properties is summarised in Table 1. Model of the tunnel in Plaxis 3D Tunnel is shown in Fig. 3.



Delomed Mesh  
Extreme total displacement:  $93.74 \times 10^{-3}$  m

Fig. 3. Model of the tunnel in Plaxis 3D Tunnel



## 2.3. Analysis of results

### 2.3.1 Effect of burial depth on ground settlement

Results of the ground settlement around the tunnel corresponding to the different burial depths of the tunnel are summarised in Table 2 and Fig. 4.

Table 2

Results of the ground deformation around the tunnel

Ground settlement	Burial depth, <i>m</i>			
	15	20	25	30
$U_z, \text{ cm}$	9.37	6.33	4.75	2.56
$U_x, \text{ cm}$	2.17	1.21	0.79	0.48

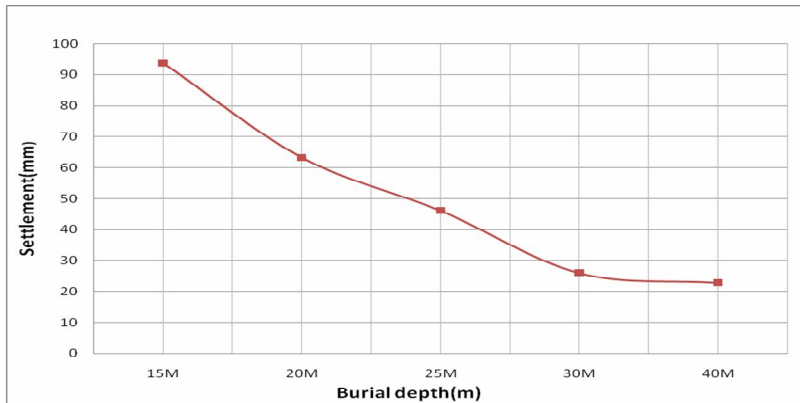


Fig. 4. Settlement values corresponding to burial depth

Analysis of the 6.65 *m* diameter tunnel shows that if the burial depth increases then the ground surface settlement decreases. The settlement is negligible when the burial depth reaches a particular value.

If twin tunnels are constructed alternately, the ground surface settlement on the 2<sup>nd</sup> tunnel is greater than the 1<sup>st</sup> one. After construction of two tunnels, the center line of settlement groove on the ground between the two tunnels is not symmetric. The deeper the tunnel is, the fewer tunnels settlement is. When the burial depth is 30 *m*, two tunnels bear forces independently and sunk relatively evenly.

When the bottom of the tunnel is placed at the depth of 15 *m* of soft soil area, the value of displacement and deformation is relatively large. The largest vertical settlement is above and below the tunnel.

### 2.3.2 Case study of the distance between two tunnels

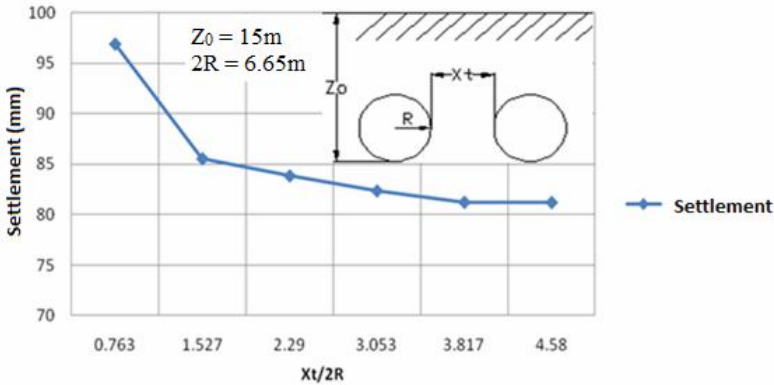


Fig. 5. Effect of distance between two tunnels on largest ground deformation

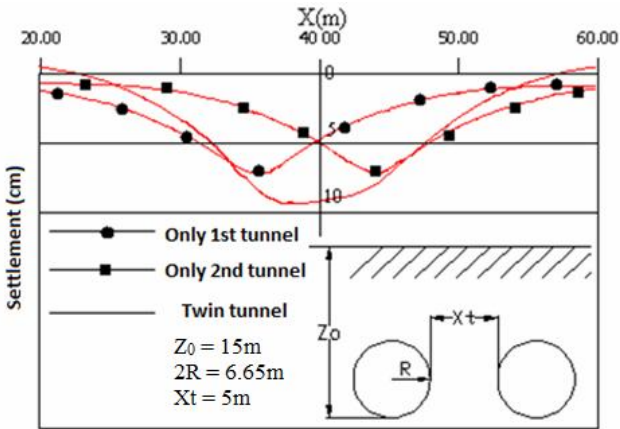


Fig. 6. Ground settlement for single tunnel and twin tunnel at a depth of 15m

Building the 2<sup>nd</sup> tunnel effects increases the stress on the 1<sup>st</sup> tunnel. According to the Fig. 6, it's clear that the 2<sup>nd</sup> tunnel has a large effect on ground settlement which leads to the whole settlement of twin tunnels greater than single tunnel.

According to the Fig. 5, it's clear that the further the distance between two tunnels is, the less the largest settlement is. When the ratio of  $X_t/2R$  reaches a particular value, the effect of each tunnel on the other one is negligible. In this case, the settlement line is unaltered when  $X_t/2R > 3$ .

Vertical settlement of ground due to metro construction can cause danger to nearby buildings. Therefore, this analysis can be applied to find the optimum

distance between tunnels in order to satisfy both economical and technical purposes.

### 2.3.3 Effect of metro construction on nearby buildings

Ground settlement causes deformation of buildings which are located in affected settlement zone. The degree of settlement effect depends on the ground settlement and the shape, size, position, and condition of building.

Buildings located on the center area of deformation zone are affected heavily by the ground settlement. Therefore, buildings' deformations develop primarily from the roots to the low floors of the buildings.

The primary affects of vertical settlement on buildings are bending and angularity. Horizontal deformations only effect on buildings' structure through force of friction at buildings' bottom and sides of foundation. In general, effectiveness of horizontal deformation is much less than vertical one.

### 2.3.4 Reasonable burial depth for minimizing the effect of Ben Thanh - Suoi Tien tunnel construction on nearby buildings

There are many methods to assess the ground settlement affecting on houses such as methods of Prof Wahls (1981), and Prof Attewell (1986). [1]

According to Attewell's research, destruction of structures on the ground is divided into 4 groups depending on the inclination and ground settlement as shown in Table 3.

Table 3

Destruction grouping of structures on the ground

Type	Ground settlement	
	Max settlement, <i>mm</i>	Inclination, <i>mm/m</i>
Negligible	0-50	0-5
Medium	50-75	5-20
Much	>75	>20

This paper focuses on the influence of vertical settlement, the most influence factor to nearby buildings.

Table 4

Ground settlement. Burial depth: 15*m*, distance between 2 tunnels: 5*m* to 30*m*

Distance, <i>m</i>	5	10	20	25	30
Settlement, <i>mm</i>	96.89	85.54	83.85	82.36	81.24

Table 5

Ground settlement. Burial depth: 20*m* to 40*m*. Distance between 2 tunnels: 5*m*.

Burial depth, <i>m</i>	20	25	30	40
Settlement, <i>mm</i>	65.34	48.99	27.15	24.51

According to the comparison of the above tables against the Attewell's table, if the burial depth is 15m then the degree of ground settlement is significant. Therefore, it is needed to take measures to minimise the damage that may occur to the nearby buildings.

If the burial depth is deeper than 20m then the degree of ground settlement is medium and it does not cause serious impact on the nearby buildings.

### 3. Conclusions

Metro tunnel construction causes the change of stress state and natural deformation of land. Therefore, it creates fading deformation field around the land masses.

Reasonable burial depth for Ben Thanh – Suoi Tien tunnel is from 15m to 20m (about 2D to 3D where D is tunnel's diameter)

Vertical settlement badly effects on nearby buildings. The damage degree depends on the structure condition and factors of ground deformation field. It sometimes requires measures to protect nearby buildings.

Choosing reasonable burial depth and distance between 2 tunnels both not only can satisfy the technical requirement but also save the capital on construction.

#### REFERENCES

- [1] Attewell, P. B., Yeates, J. & Selby, A. R. 1986. *Soil movements induced by tunnelling and their effects on pipelines and structures*, Blackie and Son Ltd, UK.
- [2] JG Wang, SL Kong and CF Leung (2003), *Twin tunnel induced ground settlement in soft soils*.
- [3] L.V. Makopski (2004), *Underground construction in urban area*, Ha Noi.
- [4] Le Van Thuong et all, (1981), *Principle of designing underground construction*.
- [5] Paul Sweeney (2006), *A study of interaction effects due to bored tunnels in clay*, Massachusetts Institute of Technology.

*Нгуєн Ань Туан, Чан Дик Тінь, Нгуєн Тхань Дат*

#### **АНАЛІЗ ВПЛИВУ ПРОКЛАДКИ ТУНЕЛЮ У МІСТІ ХОШИМІН НА СУСІДНІ СПОРУДИ**

В останні роки з розвитком потужних обчислювальних інструментів чисельні методи домінували в розрахунку проблем поверхневої деформації, викликаних тунелюванням. Чисельні методи використовуються не тільки для прогнозування деформації ґрунту навколо тунелю, але і для всього процесу проектування та будівництва тунелів, включаючи моделювання процесу виїмки і будівництва тунелі між ґрунтом - оболонкою тунелі, взаємним впливом між сусідніми тунелями, проникністю і ущільненням. Одним з найбільш точних чисельних методів є метод скінченних елементів (МСЕ). Метою даної роботи є дослідження впливу прокладки тунелю в слабкому ґрунті в районі Хошиміну. МСЕ, реалізований в програмі Plaxis 3D Tunnel, використовується для прогнозування зміщення ґрунту і аналізу впливу процесу тунелювання на сусідні споруди. Результати досліджень дозволяють визначити глибину прокладки тунелю і відстань між двома тунелями, які відповідають вимогам безпеки будівель.

**Ключові слова:** тунель, слабкий ґрунт, осад, метод скінченних елементів.

*Nguyen Anh Tuan, Tran Duc Chinh, Nguyen Thanh Dat*

### **ANALYSIS OF THE EFFECT OF THE HO CHI MINH CITY TUNNEL SETTLEMENT ON THE ADJACENT BUILDINGS**

In recent years, with the advent of powerful computing tools, numerical methods have prevailed to the problem of ground deformation induced by tunneling. Numerical methods are applied not only to the ground settlement prediction but also to the entire tunnel design procedures, including simulation of the excavation sequence and placing of the lining, soil - tunnel lining interaction, effects of nearby tunnels, seepage, and consolidation. One of the more refined numerical methods is the Finite Element Method (FEM). The paper is aimed at studying the effect of settlement of the Ho Chi Minh City Tunnel in soft soil condition on the nearby buildings. The Finite Element Method using Plaxis 3D Tunnel is introduced to predict the ground settlement and to analyse the settlement effect of the tunnel during construction on the surrounding buildings. The reasonable depth and distance between the two tunnels can be suggested for satisfy construction requirements.

**Keywords:** Tunnel, soft soil, settlement, Finite Element Method

*Нгуєн Ань Туан, Чан Дык Тинь, Нгуєн Тхань Дат*

### **АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПРОКЛАДКИ ТОННЕЛЯ В ГОРОДЕ ХОШИМИН НА СОСЕДНИЕ СООРУЖЕНИЯ**

В последние годы с развитием мощных вычислительных инструментов численные методы доминировали в расчете проблем поверхностной деформации, вызванных туннелированием. Численные методы используются не только для прогнозирования деформации грунта вокруг туннеля, но и для всего процесса проектирования и строительства туннелей, включая моделирование процесса выемки и строительства туннели между грунтом - оболочкой туннели, взаимным влиянием между соседними туннелями, проницаемостью и уплотнением. Одним из наиболее точных численных методов является метод конечных элементов (МКЭ). Целью данной работы является исследование влияния осадок при строительстве туннелей в слабом грунте в районе Хошимина. МКЭ, реализованный в программе Plaxis 3D Tunnel, используется для прогнозирования смещения грунта и анализа влияния процесса туннелирования на соседние сооружения. Результаты исследований позволяют определить глубину прокладки туннеля и расстояние между двумя туннелями, которые соответствуют требованиям безопасности зданий.

**Ключевые слова:** туннель, слабые грунты, осадки, метод конечных элементов.

УДК 539.3

*Нгуєн Ань Туан, Чан Дик Тинь, Нгуєн Тхань Дат.* **Аналіз впливу прокладки тунелю в місті Хошимін на сусідні споруди** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вып. 99. – С. 142 – 150.

*Метою статті є вивчення впливу прокладки тунелю в м'яких грунтах на доколійні будівлі за допомогою тунелювання методом скінченних елементів з використанням Plaxis 3D.*

Табл. 3. Іл. 6. Бібліогр. 37 назв.

UDC 539.3

*Nguyen Anh Tuan, Tran Duc Chinh, Nguyen Thanh Dat. Analysis of the effect of the Ho Chi Minh City Tunnel settlement on the adjacent buildings // Опір матеріалів і теорія споруд (Strength of Materials and Theory of Structures). – 2017. – Issue. 99. – P. 142 – 150.*

*The paper aims to studying the effect of settlement of the Ho Chi Minh City Tunnel in soft soil condition on the nearby buildings due to tunneling by the Finite Element Method using Plaxis 3D Tunnel.*

Table 3. Fig. 6. Ref. 37

*Нгуєн Ань Туан, Чан Дык Тинь, Нгуєн Тхань Дат. Анализ влияния прокладки тоннеля в городе Хошимин на соседние сооружения // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вып. 99. – С. 142 – 150.*

*Целью статьи является изучение влияния прокладки тоннеля в мягких почвах на близлежащие здания с помощью туннелирования методом конечных элементов с использованием Plaxis 3D.*

Табл. 3. Ил. 6. Библиогр. 37 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):**

*Nguyen Anh Tuan, PhD, Lecturer, Faculty of Transportation Engineering, Hochiminh City University of Transport, No. 2, D3 St., Ward 25, Binh Thanh Dist., Hochiminh City, Vietnam.*

**Phone:** (+84) 917.863.898.

**Email:** tuankct@hcmutrans.edu.vn

*Tran Duc Chinh, DSc, Prof. (Viet Nam), Academician of ABU Academy, Ukraine.*

**Phone:** (+84) 1688.997.750.

**Email:** td\_chinh07@hcmutrans.edu.vn

*Nguyen Thanh Dat, PhD, Associate Prof. (Viet Nam), Hochiminh City University of Transport, No. 2, D3 St., Ward 25, Binh Thanh Dist., Hochiminh City, Vietnam.*

**Phone:** (+84) 989.051.723.

**Email:** nguyenthanhhoaitu@yahoo.com

УДК 539.3

## ІНДИФЕРЕНТНІСТЬ ТЕНЗОРІВ ДЕФОРМАЦІЙ, НАПРУЖЕНЬ ТА ЇХ ПРИРОЩЕНЬ ЗА УМОВИ ЕНЕРГЕТИЧНОЇ СПОЛУЧЕНОСТІ

Ю.В. Максим'юк,  
канд. техн. наук, доцент

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680*

Розглянута проблема комплексного моделювання зміни властивостей матеріалу в залежності від фізичної і геометричної нелінійності для чисельного моделювання формозмінення тонкостінних масивних та комбінованих вісесиметричних тіл. На основі класичних робіт викладені основні поняття, індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх приращень при умові енергетичної сполученості при опису процесу формозмінення.

**Ключові слова:** фізична та геометрична нелінійність, тонкостінні масивні та комбіновані вісесиметричні тіла, індиферентність, умова енергетичної сполученості, початкова відрахункова, проміжна перемінна відрахункова та актуальна конфігурація.

**Вступ.** Проблемі чисельного моделювання формозмінення тонкостінних масивних та комбінованих вісесиметричних конструкцій на основі МСЕ приділено велика кількість робіт, але для кожного з описаних класів об'єктів окремо, що значно звужує область застосування даних розробок.

В даній роботі прийнята спроба побудови універсальних математичних моделей, описуючих еволюцію напружено-деформованого стану тонкостінних масивних та комбінованих вісесиметричних тіл, незалежно від виду процесу формозмінення.

**1. Конфігурації при моделюванні формозмінення.** Математичне моделювання формозмінення тонкостінних, масивних та комбінованих вісесиметричних тіл здійснюється на основі фізичної і геометричної нелінійності та термов'язкопружнопластичної задачі. Прийнято, що матеріал відповідає моделі ізотропного середовища при малих пружних і великих незворотних деформаціях.

Вісесиметричні об'єкти розглядаються в базисній декартовій системі координат. Суттєва зміна первісної геометрії тіл при формозміненні обумовлена необхідністю використовувати початкову відрахункову та актуальну конфігурації, вектори місця і метричні тензори яких визначаються наступними співвідношеннями:

$$\bar{r} = \bar{r}'(z', t_0), \quad g_{ij} = \bar{r}'_i \bar{r}'_j, \quad \bar{r}'_i = \frac{\partial}{\partial z'^i} \bar{r},$$

$$\bar{R} = \bar{R}(Z', t), \quad G_{ij} = \bar{R}_{,i} \bar{R}_{,j}, \quad \bar{R}_{,i} = \frac{\partial}{\partial z^i} \bar{R}. \quad (1)$$

Тут і в подальшому великі латинські літери застосовуються при визначенні параметрів актуальної конфігурації, малі – початкової відрахункової.

Представляючи вектор місця якоїсь точки актуальної конфігурації, як суму вектора місця початкової відрахункової конфігурації і вектора переміщень  $\bar{u}$ , приходимо до виразів метричного тензора актуальної конфігурації:

$$G_{ij} = (\bar{r}_{,i} + \bar{u}_{,i})(\bar{r}_{,j} + \bar{u}_{,j}) = \bar{r}_{,i} \bar{r}_{,j} + \bar{r}_{,j} \bar{u}_{,i} + \bar{r}_{,i} \bar{u}_{,j} + \bar{u}_{,i} \bar{u}_{,j} = g_{ij} + \Delta G_{ij}, \quad (2)$$

де

$$\Delta G_{ij} = \bar{r}_{,j} \bar{u}_{,i} + \bar{r}_{,i} \bar{u}_{,j} + \bar{u}_{,i} \bar{u}_{,j}. \quad (3)$$

Тензор деформацій актуальної конфігурації приймається зв'язаним з мірою Фінгера, визначеним також в актуальній конфігурації, причому коваріантні компоненти Фінгера  $F^{ij}$  рівні коваріантним компонентам метричного тензора початкової відрахункової конфігурації [2]

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\hat{F} - \hat{G}). \quad (4)$$

Для опису напруженого стану об'єкта використовується тензор істинних напружень Коші.

При виборі мір деформацій і напружень враховано вимоги енергетичної сполученості. Як показано в роботі [1], міри Фінгера і Коші являються енергетично сполученими, на відміну наприклад від мір Генкі і Коші.

Матеріальні похідні по часу від тензора деформацій (3) і тензора напружень Коші цим властивостям не володіють, тому необхідно використовувати об'єктивні похідні.

**2. Об'єктивність тензорів приросту деформацій та напружень.** В якості об'єктивної похідної використовується похідна Олдройда [3]. Вибір об'єктивної похідної для прийнятої моделі матеріалу при малих пружних і великих незворотних деформаціях, як показано в роботі [1], може бути довільним і зроблений виходячи із зручності побудови обчислювального процесу. До переваг похідної Олдройда потрібно також віднести відсутність осциляцій при чистому зсуві, що характерно для похідної Яумана.

Для математичного обґрунтування об'єктивності використання формулювань законів стану, а також для побудови крокового процесу вирішення еволюційних задач формозмінення початкова відрахункова конфігурація тіла, відповідна моменту часу  $\tilde{t}$ , достатньо близькою до  $t$  актуальної конфігурації:

$$t = \tilde{t} + \Delta t. \quad (5)$$



Графічне зображення вектора місця трьох використуваних конфігурацій (початкова відрахункова, проміжна перемінна відрахункова, актуальна) представлено на рис. 1.

Приріст  $\Delta t$  вибирається таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора при переході від проміжної перемінної відрахункової конфігурації до актуальної були малі в порівнянні з  $G_{ij}$ .

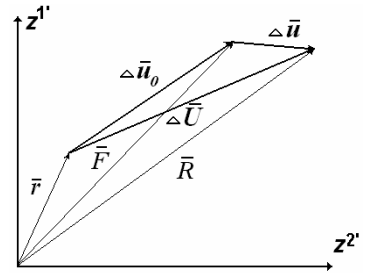


Рис. 1

$$\Delta \hat{G} = \hat{G} - \hat{g} \quad \Delta G_{ij} \ll G_{ij}. \quad (6)$$

Використовуючи проміжну перемінну відрахункову конфігурацію, тензор деформації можна представити наступним чином:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\hat{F} - \hat{g} - \hat{G}) = \hat{\varepsilon} + \Delta \hat{\varepsilon}, \quad (7)$$

де

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\hat{F} - \hat{g}), \quad \Delta \hat{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \Delta \hat{G}. \quad (8)$$

Приймаючи швидкість деформації в якості похідної Олдройда від тензора (3), покажемо об'єктивність тензора приросту деформацій при переході від проміжної перемінної відрахункової до актуальної конфігурації:

$$\Delta \hat{\varepsilon} = \hat{\varepsilon}^{ol} \Delta t, \quad (9)$$

де

$$\hat{\varepsilon}^{ol} = \frac{1}{2} \left[ \hat{F} - \hat{G} - \nabla \bar{v}^T (\hat{F} - \hat{G}) - (\hat{F} - \hat{G}) \nabla \bar{v} \right] = \frac{1}{2} (\dot{\hat{G}} + \nabla \hat{G}) = -\frac{1}{2} \frac{\partial \hat{G}}{\partial t}. \quad (10)$$

Аналогічно (7) представимо напруження в актуальній конфігурації:

$$\hat{\sigma} = \hat{\hat{\sigma}} + \Delta \hat{\sigma}, \quad (11)$$

де

$$\hat{\hat{\sigma}} = \hat{\sigma}^{ij} \bar{e}_i \bar{e}_j, \quad \Delta \hat{\sigma} = \Delta \sigma^{ij} \bar{E}_i \bar{E}_j, \quad \hat{\sigma} = \sigma^{ij} \bar{E}_i \bar{E}_j. \quad (12)$$

Якщо всі вхідні в (12) величини віднести до актуальної конфігурації, то отримаємо:

$$\hat{\sigma} = \hat{\hat{\sigma}} + \Delta \hat{\sigma}, \quad \hat{\hat{\sigma}} = \hat{\sigma}^{ij} \bar{E}_i \bar{E}_j. \quad (13)$$

Виходячи з (12),  $\Delta \hat{\sigma}$  представляє собою добуток матеріальної похідної  $\hat{\sigma}$  на приріст часу  $\Delta t$  :

$$\hat{\sigma} \Delta t = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}. \quad (14)$$

Приріст напружень із (13) може бути записаний, як добуток об'єктивної похідної  $\Delta t$  :

$$\hat{\sigma}^{ol} \Delta t = \hat{\sigma} + \hat{\sigma}. \quad (15)$$

Використовуючи вирази (14) і (15), а також здійснюючи граничний перехід при  $\Delta t \rightarrow 0$ , приходимо до виду об'єктивної похідної, відповідно похідній Олдройда.

Таким чином, показана індивідуальність тензора приросту деформацій (12) і приросту напружень (15), причому в обох випадках використана одна і та ж об'єктивна похідна. Це дає можливість приймати міри для формулювання законів стану матеріалу. Представлення тензора приросту деформацій, як добуток похідної Олдройда на приріст часу (9) дозволяє використовувати адитивний розклад, аналогічно прийнятому для швидкостей деформацій (4) і для їх приростів.

**3. Покомпонентне подання процесу формозмінення.** При покомпонентному представленні наведені вище формули набувають наступного вигляду. Використовуючи проміжну перемінну відрахункову конфігурацію представимо деформацію в вигляді суми компонент, обумовлених переходом від початкової відрахункової до проміжної перемінної відрахункової і від проміжної перемінної відрахункової до актуальної конфігурації:

$$\varepsilon_o^{ij} = \varepsilon^{ij} + \Delta \varepsilon^{ij}, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2}(g_o^{ij} - g^{ij}), \\ \Delta \varepsilon^{ij} &= \frac{1}{2}(g^{ij} - G^{ij}) = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij}. \end{aligned} \quad (17)$$

Коваріантні компоненти  $\Delta G^{ij}$  визначаються з умови:

$$G^{ik} G_{kj} = \delta_j^i. \quad (18)$$

Представимо компоненти метричного тензора в актуальній конфігурації :

$$(g^{ik} + \Delta G^{ik})(g_{kj} + \Delta G_{kj}) - \delta_j^i = 0. \quad (19)$$

Нехтуючи приростом малих величин  $\Delta G^{ik} \Delta G_{kj}$ , одержуємо :

$$\Delta G^{ik} g_{kj} + \Delta G_{kj} g^{ik} = 0, \quad (20)$$

звідси

$$\Delta G^{ik} = -\Delta G_{kj} g^{ik} g^{jl}. \quad (21)$$

Коваріантні компоненти приросту деформацій в актуальній конфігурації відносно проміжної відрахункової дорівнюють:

$$\Delta \varepsilon_{kl} = \Delta \varepsilon^{ij} G_{ik} G_{jl} \approx \Delta \varepsilon^{ij} g_{ik} g_{jl} = -\frac{1}{2} \Delta G^{ij} g_{ik} g_{jl} = \frac{1}{2} \Delta G_{kl}. \quad (22)$$

Будемо вважати, що в кожній точці тіла для актуальної і проміжної перемінної відрахункової конфігурації відомі компоненти тензору перетворення  $z^{\alpha'}_{,\beta}$ , і  $Z^{\alpha'}_{,\beta}$  відповідно, що обумовлюють зв'язок між місцевою та базисною системою координат:

$$z^{\alpha'}_{,\beta} = \frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial x^{\beta}}, \quad Z^{\alpha'}_{,\beta} = \frac{\partial Z^{\alpha'}}{\partial X^{\beta}}. \quad (23)$$

Подамо компоненти метричного тензору  $g_{mn}$  для вісесиметричних тіл в місцевій проміжній перемінній відрахунковій системі координат через коефіцієнти перетворення і компоненти метричного тензору базисної кругової ортогональної циліндричної системи координат:

$$g_{ij} = z_i^{m'} z_j^{n'} g_{m'n'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = 1, \quad g_{\alpha'3'} = 0, \quad g_{3'3'} = (z^{2'})^2, \\ g_{\alpha\beta} = z_{\alpha}^{v'} z_{\beta}^{v'}, \quad g_{33} = (z^{2'})^2. \quad (24)$$

Аналогічно, в актуальній конфігурації:

$$G_{\alpha\beta} = Z_{\alpha}^{v'} Z_{\beta}^{v'}, \quad G_{33} = (Z^{2'})^2. \quad (25)$$

Відповідно для плоско-деформованих тіл  $g_{3'3'} = 1$ , тоді в проміжній перемінній відрахунковій системі координат  $g_{\alpha\beta} = z_{\alpha}^{v'} z_{\beta}^{v'}$ , а  $g_{33} = 1$ .

В актуальній конфігурації:

$$G_{\alpha\beta} = Z_{\alpha}^{v'} Z_{\beta}^{v'}, \quad G_{33} = 1. \quad (26)$$

Нове положення точки А в системі  $z^{i'}$  визначається координатами:

$$Z^{\alpha'} = z^{\alpha'} + u^{\alpha'}. \quad (27)$$

Диференціюючи по  $x^j$ , визначимо компоненти тензора перетворення в актуальній системі координат:

$$Z^{\alpha'}_{,\beta} = z^{\alpha'}_{,\beta} + u^{\alpha'}_{,\beta}. \quad (28)$$

Представимо коваріантні компоненти метричного тензора  $G_{\alpha\beta}$  в актуальній конфігурації через компоненти тензора перетворень:

$$G_{\alpha\beta} = \left( z^{\alpha'}_{,\alpha} + u^{\alpha'}_{,\alpha} \right) \left( z^{\alpha'}_{,\beta} + u^{\alpha'}_{,\beta} \right) = z^{\alpha'}_{,\alpha} z^{\alpha'}_{,\beta} + z^{\alpha'}_{,\alpha} u^{\alpha'}_{,\beta} + z^{\alpha'}_{,\beta} u^{\alpha'}_{,\alpha} + u^{\alpha'}_{,\alpha} u^{\alpha'}_{,\beta} \\ G_{33} = (z^{2'} + u^{2'})^2. \quad (29)$$

Перепишемо (29) в вигляді :

$$G_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} + \Delta G_{\alpha\beta}, \quad G_{33} = g_{33} + \Delta G_{33}, \quad (30)$$

де

$$\Delta G_{\alpha\beta} = z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha} + u'_{,\alpha} u'_{,\beta}, \quad \Delta G_{33} = \left(2z' u'^2 + (u'^2)^2\right). \quad (31)$$

Підставляючи (31) в (32), запишемо геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних компонент приросту деформації в актуальній конфігурації відносно проміжної перемінної відрахункової:

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha} + u'_{,\alpha} u'_{,\beta} \right),$$

$$\Delta \varepsilon_{33} = \frac{1}{2} \left( 2z' u'^2 + (u'^2)^2 \right). \quad (32)$$

Згідно прийнятим припущенням, співвідношення (32) справедливе при малих  $\Delta \varepsilon_{kl}$  і великих переміщеннях.

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\Delta \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha} \right),$$

$$\Delta \hat{\varepsilon}_{33} = z'^2 u'^2. \quad (33)$$

Коваріантні компоненти тензора приросту нелінійних деформацій в актуальній конфігурації (32) можна співвідношеннями аналогічними за формулою з (33):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \bar{z}'_{,\beta} u'_{,\alpha} + \bar{z}'_{,\alpha} u'_{,\beta} \right), \quad \varepsilon_{33} = \bar{z}'^2 u'^2. \quad (34)$$

де коефіцієнти перетворень подамо у вигляді:

$$\bar{z}'_{,\alpha} = z'_{,\alpha} + \frac{1}{2} u'_{,\alpha}, \quad \bar{z}'_{,\beta} = z'_{,\beta} + \frac{1}{2} u'_{,\beta}, \quad (35)$$

Можна показати, що вираз (36) тотожно дорівнює (32):

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \left( z'_{,\alpha} + \frac{1}{2} u'_{,\alpha} \right) u'_{,\beta} + \left( z'_{,\beta} + \frac{1}{2} u'_{,\beta} \right) u'_{,\alpha} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left( z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + \frac{1}{2} u'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha} + \frac{1}{2} u'_{,\beta} u'_{,\alpha} \right) = \frac{1}{2} \left( z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha} + u'_{,\alpha} u'_{,\beta} \right),$$

$$\varepsilon_{33} = \left( z'^2 + \frac{1}{2} u'^2 \right) u'^2. \quad (36)$$

Аналогічно можна представити варіації деформацій. Обчислимо варіацію приросту нелінійних деформацій (32):

$$\delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \left( z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} + 2 \delta u'_{,\alpha} u'_{,\beta} \right). \quad (37)$$

$$\delta(\Delta \varepsilon_{33}) = \frac{1}{2} \left( 2z' \delta u'^2 + 2u'^2 \delta u'^2 \right).$$

Представимо варіацію нелінійних деформацій аналогічно (32) :

$$\delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) = \frac{1}{2} \left( Z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + Z'_{,\alpha} \delta u'_{,\alpha} \right), \quad (38)$$

де

$$Z^{\nu'} = z^{\nu'} + u^{\nu'}, \quad Z_{,\beta}^{\nu'} = z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'}, \quad (39)$$

При їх підстановці в (37) отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta(\varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} \left( (z_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'}) \delta u_{,\beta}^{\nu'} + (z_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'}) \delta u_{,\alpha}^{\nu'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + u_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} + u_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left( z_{,\alpha}^{\nu'} \delta u_{,\beta}^{\nu'} + z_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} + 2u_{,\beta}^{\nu'} \delta u_{,\alpha}^{\nu'} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Варіаційне рівняння рівноваги в актуальній конфігурації має вигляд

$$\delta W - \delta A = 0, \quad (41)$$

де  $\delta A$  - варіація роботи зовнішніх сил,  $\delta W$  - варіація роботи внутрішніх сил

$$\delta W = \frac{1}{2} \iint_{x_1 x_2} \sigma^{ij} \delta G_{ij} \sqrt{G} dx^1 dx^2. \quad (42)$$

Представляючи  $G_{ij}$  згідно (6) і враховуючи, що при варіюванні в актуальній конфігурації  $\bar{g}_{ij}$  залишається незмінним, отримаємо:

$$\delta W = \frac{1}{2} \iint_{x_1 x_2} \sigma^{ij} \delta(\Delta G_{ij}) \sqrt{G} dx^1 dx^2. \quad (43)$$

У відповідності з (22) запишемо вираз варіації енергії в актуальній конфігурації через деформації:

$$\delta W = \iint_{x_1 x_2} \sigma^{ij} \delta(\Delta \varepsilon_{ij}) \sqrt{G} dx^1 dx^2. \quad (44)$$

З даного виразу в подальшому можна отримати вектор вузлових реакцій, що визначається по значенням повних напружень в актуальній конфігурації і коефіцієнти матриці жорсткості СЕ в проміжній перемінній відрахунковій конфігурації.

**Висновок.** Наведені вирази моделювання формозмінення з умовами індиферентності тензорів деформацій, напружень та їх прирощень при умові енергетичної сполученості для тонкостінних масивних та комбінованих вісесиметричних тіл, дозволять в подальшому більш точно вибрати визначальні рівняння стану матеріалу при фізичній і геометричній нелінійності.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Левитас В.И.* Большие упруго-пластические деформации материалов при высоком давлении / В.И. Левитас. – Киев: Наук. думка, 1987. – 232 с.
2. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости / А.И. Лурье. – М.: Наука, 1980. – 512с.
3. *Поздеев А.А.* Большие упруго-пластические деформации / А.А. Поздеев, П.В. Трусов, Ю.И. Няшин – М.: Наука, 1986. – 232 с.

## REFERENCES

1. *Levitas V.I.* Bolshie uprugo-plasticheskie deformatsii materialov pri vyisokom davlenii (The large elastic-plastic deformation of materials under high pressure) / V.I. Levitas. - Kiev: Science. Dumka, 1987. – 232 p.
2. *Lurie A.I.* Nelineynaya teoriya uprugosti (Nonlinear Elasticity Theory) / A.I. Lurie. - Moscow: Nauka, 1980. – 512 p.
3. *Pozdeev A.A.* Bolshie uprugo-plasticheskie deformatsii (Large elastic-plastic deformation) / A.A. Pozdeev, P.V. Trusov, Y.I. Nyashin - Moscow: Nauka, 1986. - 232 p.

*Maksymiuk Yu.*

**INDIFFERENCE OF STRAIN AND STRESS TENSORS AND THEIR INCREMENTS UNDER CONDITION OF ENERGY COMPABILITY**

The problem of complex modeling of changes of material properties depending on physical and geometric nonlinearity for numerical simulation of the form-modification of thin-walled massive and combined axially symmetric bodies is considered. On the basis of classical papers, the basic concepts, the indifference of strain and stress tensors, and their increments under condition of energy compability are outlined in the description of the form-modification process.

A large number of works are devoted to the problem of numerical simulation of the form-modification process of thin-walled massive and combined axially symmetric structures on the basis of FEM, but there are separately for each of the described classes of objects. It is narrows the scope of application of this development greatly.

In this paper an attempt is made to construct universal mathematical models for description of the evolution of the stress-strained state of thin-walled massive and combined axially symmetric bodies, regardless of the type of the process of form-modification process. The indifference of the strain increment and the of stress increment tensor are shown, in which in both cases the same objective derivative is used. This makes it possible to use the taken measures to form the laws of the state of the material. The strain increment tensor are given as a product of the Aldroidi derivative on value of time increase, that allows for an additive decay similar to that adopted for the strain velocity and for their increments.

**Keywords:** physical and geometrical nonlinearity, thin-walled body, massive and combined axially symmetric body, indifference, energy compability condition, the initial countdown configuration, intermediate variable deductible and actual configurations.

*Максимюк Ю.В.*

**ИНДИФФЕРЕНТНОСТЬ ТЕНЗОРОВ ДЕФОРМАЦИЙ, НАПРЯЖЕНИЙ И ИХ ПРИРАЩЕНИЙ ПРИ УСЛОВИИ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СОПРЯЖЕННОСТИ**

Рассмотрена проблема комплексного моделирования изменения свойств материала в зависимости от физической и геометрической нелинейности для численного моделирования формоизменения тонкостенных массивных и комбинированных осесимметричных тел. На основе классических работ изложены основные понятия, индифферентность тензоров деформаций, напряжений и их приращений при условии энергетической сопряженности при описании процесса формоизменения.

**Ключевые слова:** физическая и геометрическая нелинейность, тонкостенные массивные и комбинированные осесимметричные тела, индифферентность, условие энергетической сопряженности, начальная отсчетная, промежуточная переменная отсчетная и актуальная конфигурация.

УДК 539.3

*Максим'юк Ю.В. Индиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень за умови енергетичної сполученості // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99. – С. 151 - 159.*

*В роботі розглянута проблема комплексного моделювання зміни властивостей матеріалу в залежності від фізичної і геометричної нелінійності для чисельного моделювання формозмінення тонкостінних масивних та комбінованих вісесиметричних тіл.*

Табл. 0. Іл. 1. Бібліогр. 3 назв.

UDC 539.3

*Maksymyuk Yu. Indifference of strain and stress tensors and their increments under condition of energy compability // Opir materialiv i teoria sporud: nauk.-tekh. zbirn. – K.: KNUBA, 2017. – Issue 99. – P. 151 – 159. – Ukr.*

*In the paper the problem of modeling of complex material properties change depending on the physical and geometric nonlinearity for numerical simulation of forming thin massive and combined axisymmetrical bodies.*

Table 0. Fig. 1. Ref. 3.

УДК 539.3

*Максимюк Ю.В. Индифферентность тензоров деформаций, напряжений и их приращений при условии энергетической сопряженности // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2017. – Вип. 99. – С. 151 - 159.*

*В работе рассмотрена проблема комплексного моделирования изменения свойств материала в зависимости от физической и геометрической нелинейности для численного моделирования формоизменения тонкостенных массивных и комбинированных осесимметричных тел.*

Табл. 0. Ил. 1. Библиогр. 3 назв.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки КНУБА МАКСИМ'ЮК Юрій Всеволодович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельної механіки, Максим'юк Юрій Всеволодович.

**Адреса домашня:** Україна, м. Київ, вул. Кривоноса Максима, 6, кв. 322/3.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-55-38;

**Мобільний тел.:** +38(067) 230-94-72;

**E-mail:** maximyuk@ukr.net

УДК 539.3

## ЗАСТОСУВАННЯ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛІЗУ ДО МОДЕЛЮВАННЯ СТОХАСТИЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ПРУЖНИХ СИСТЕМ ПРИ СЕЙСМІЧНОМУ ВПЛИВІ

**О.О. Лук'янченко,**

канд. техн. наук;

**Ю.В. Ворона,**

канд. техн. наук,

**О.В. Костіна,**

канд. техн. наук,

**О.В. Герашенко,**

канд. техн. наук.

*Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680; e-mail: [lukianch0907@meta.ua](mailto:lukianch0907@meta.ua)*

Розроблена методика моделювання стохастичного поведінки пружних систем при сейсмічному впливі на основі теорій і методів вейвлет-аналізу, нелінійної механіки, скінченних елементів. Виконано імовірнісне моделювання сейсмічного впливу із заданою магнітудою і максимальною амплітудою горизонтальної сейсмічної хвилі за допомогою статистичного підходу Руїза, Пензісна та теорії рухомих хвиль. Врахована поперечна згинальна хвильова реакція системи у вигляді початкової недосконалої форми. За наявності реального запису прискорення і переміщення ґрунту імовірнісне моделювання сейсмічного впливу виконується за допомогою вейвлет-аналізу та теорії рухомих хвиль. Розв'язана тестова задача про нестационарні стохастичні коливання вертикального пружного стержня при сейсмічному впливі різної магнітуди за допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку. Оцінено вплив хвильової реакції та осьової стискаючої сили на статичні і динамічні характеристики стержня. Виконано вейвлет-аналіз реакцій стержня на сейсмічний вплив в частотно-часовому просторі.

**Ключові слова:** сейсмічний вплив, стохастична поведінка, вейвлет-аналіз, метод скінченних елементів, нелінійна механіка, теорія рухомих хвиль.

**Вступ.** Проблема забезпечення сейсмостійкості споруд та запобігання їх руйнуванню залишається актуальною [1-13]. Важливим є вибір адекватної і ефективної моделі сейсмічного впливу та більш точного методу сейсмічного розрахунку для визначення відповідної реакції споруди. При дослідженні нестационарних стохастичних коливань складних просторових систем застосування теорій та методів вейвлет-аналізу зумовлена гострою потребою більш точного прогнозування їхньої динамічної поведінки та ідентифікації характеристик в частотно-часовому просторі [14-21]. Вперше у 1982 році французький інженер-геофізик Жан Морле запропонував вейвлет-перетворення як новий математичний метод аналізу сейсмічних сигналів. Важливо, що вейвлет-аналіз має переваги при обробці сигналів



порівняно з традиційним апаратом наближення функцій на основі рядів Фур'є. Основними є добра локалізація на частоті та в часі вейвлетних базисів і можливість застосування різноманітних базових функцій [15-19].

Оскільки сейсмічний рух ґрунту є випадковим процесом, методи розрахунку споруд засновані на імовірнісних підходах [1-6, 10, 11, 13, 21]. В теорії сейсмостійкості найбільш поширеним є спектральний метод розрахунку споруд та метод прямого чисельного інтегрування диференціальних рівнянь руху, які реалізовано в сучасних вітчизняних та зарубіжних обчислювальних комплексах SCAD, ЛІРА, ANSYS, NASTRAN [10, 22]. В нормативних вітчизняних документах [8, 12] за основний приймається спектральний метод. На думку дослідників [3, 9, 11, 13] цей метод містить суперечливі допущення і емпіричні коефіцієнти, які не відповідають дійсності. Резонансна доктрина не в повному обсязі враховує небезпеку великих сейсмічних переміщень основи, особливо в найбільш сейсмічно небезпечних слабких ґрунтах III категорії за сейсмічними властивостями. Вважається, що в основу розрахунків споруд на сейсмостійкість разом з нормуванням амплітуд прискорень ґрунту, як міру інтенсивності землетрусу, слід нормувати амплітуди його пружного переміщення і швидкості. Розрахункову модель споруди слід будувати з врахуванням її хвильової реакції на сейсмічний вплив, обчисленою за допомогою теорії рухомих хвиль.

В статті представлено методику моделювання нестационарної стохастичної поведінки пружних систем при сейсмічному впливі, яка заснована на теорії і методах вейвлет-аналізу, нелінійної механіки, скінченних елементів з використанням процедур сучасних обчислювальних комплексів NASTRAN [22], Mathcad [23] і Developer Studio [24]. Виконано імовірнісне моделювання сейсмічного впливу із заданою магнітудою і максимальною амплітудою горизонтальної сейсмічної хвилі за допомогою статистичного підходу Руїза, Пензієна та теорії рухомих хвиль. Врахована поперечна згинальна хвильова реакція системи у вигляді початкової недосконалої форми. При наявності реального запису прискорення і переміщення ґрунту імовірнісне моделювання сейсмічного впливу виконується за допомогою вейвлет-аналізу та теорії рухомих хвиль. Розв'язана тестова задача про нестационарні стохастичні коливання вертикального пружного стержня при сейсмічному впливі різної магнітуди і навантаженого осью стискаючою силою. За допомогою методу прямого чисельного інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку отримано відгуки стержня у вигляді узагальнених переміщень, узагальнених швидкостей і узагальнених прискорень. Аналіз динамічних характеристик стержня виконано в частотно-часовому просторі за допомогою вейвлет-аналізу на основі вейвлет-спектрограм та Фур'є-

образів. Використані дискретні ортогональні (Добеші4) і неперервні неортогональні (Морле) одномірні комплексні вейвлет-функції. Оцінено врахування хвильової реакції та осьового навантаження на статичні і динамічні характеристики стержня.

### 1. Імовірнісне моделювання і вейвлет-аналіз сейсмічного впливу.

В статті виконано імовірнісне моделювання сейсмічного впливу на основі статистичного підходу, запропонованого Руїзом, Пензієном [3] і апробованого авторами при реалізації ефективної схеми методу статистичних випробувань для оцінки імовірностей відказів механічної системи [5]. Відповідно до цього підходу сейсмічні хвилі, поширюючись з земній корі, наштовхуються на абсолютно тверду поверхню („скелю”), потім фільтруються м'яким шаром і далі досягають фундаменту споруди. Вибіркова функція прискорення „скелі” (рис. 1)  $a_b(t)$  визначається як результат множення квазіобвідної функції  $D(t)$  на вибірку функцію  $x(t)$ , яка генерується як послідовність незалежних гаусовських ординат з тими самими середніми значеннями і дисперсіями, за формулою

$$a_b(t) = D(t)x(t). \quad (1)$$

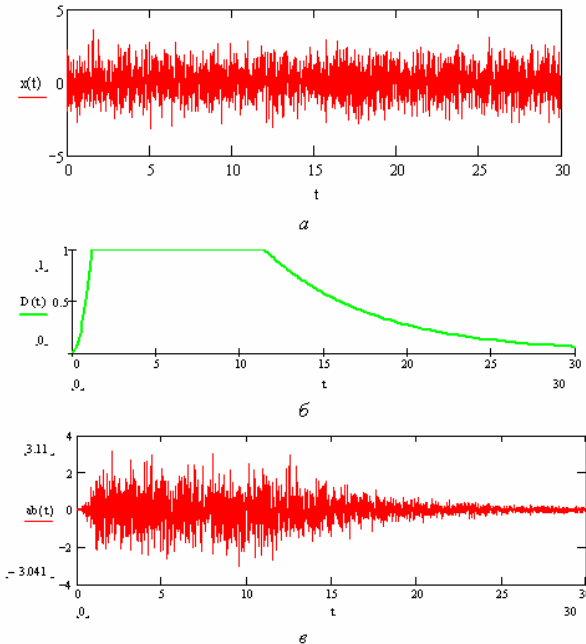


Рис. 1. Моделювання прискорення „скелі”: послідовність гаусовських ординат (а), квазіобвідна функція (б), прискорення скелі (е).

Квазіобвідна функція  $D(t)$  для нестационарного випадкового процесу приймається згладженою (рис. 1, б). Вона залежить від трьох параметрів, значення яких приймаються згідно [3]:  $t_1=1.21$  с,  $t_2=11,5$  с і  $c=0.155$  с<sup>-1</sup>. Далі враховується фільтрація прискорення „скелі” м'яким шаром, яка гасить високочастотні компоненти і підсилює складові процесу поблизу власної частоти пружної системи. Випадкове прискорення ґрунту на рівні фундаменту задається виразом

$$a_g(t) = -2\xi\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t), \quad (2)$$

де  $y(t)$  – розв'язок диференціального рівняння

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = a_b(t). \quad (3)$$

Отриманий сигнал в друге пропускається через фільтр, який подавляє компоненти з низькими частотами. Такий фільтр описується формулою

$$\ddot{z}(t) + 2\xi_1\omega_1\dot{z}(t) + \omega_1^2 z(t) = -a_g(t). \quad (4)$$

Для моделювання сейсмічного впливу з заданим максимальним значенням  $a_p$  прискорення ґрунту достатньо помножити функцію

$a_{gf}(t) = z(t)$  на амплітудний коефіцієнт  $Y$

$$\bar{a}_{gf}(t) = a_{gf}(t) \cdot Y, \quad (5)$$

де  $Y = a_p / \mu_{ap}$ ,  $\mu_{ap}$  – математичне сподівання максимального значення змодельованих вибірових функцій. Оскільки математичне сподівання максимального значення змодельованих вибірових функцій відповідає умові  $P[a_{gf}(t) \geq \mu_{ap} / t] = 1/N$ , то при  $N$  порядку 1000 можна прийняти  $\mu_{ap} = 3Sa_s$ . Стандартне відхилення  $Sa_s$  випадкової величини  $a_{gf}(t)$  визначається за формулою

$$Sa_s = Sa_{gf}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} Ga_{gf}(\omega) d\omega, \quad (6)$$

де  $Ga_{gf}(\omega)$  – спектральна щільність випадкового процесу  $a_{gf}(t)$ :

$$Ga_{gf}(\omega) = |A_f(\omega)|^2 |A(\omega)|^2 G_0, \quad -\infty < \omega < \infty. \quad (7)$$

Тут  $|A(\omega)|$  та  $|A_f(\omega)|$  – комплексні передаточні функції

$$|A(\omega)|^2 = \frac{1 + 4\xi^2(\omega/\omega_0)^2}{[1 - (\omega/\omega_0)^2]^2 + 4\xi^2(\omega/\omega_0)^2}, \quad (8)$$

$$|A_f(\omega)|^2 = \frac{(\omega/\omega_1)^4}{\left[1 - (\omega/\omega_1)^2\right]^2 + 4\xi_1^2(\omega/\omega_1)^2}. \quad (9)$$

Тут параметри ґрунту приймаються згідно [3]:  $\omega_0 = 15,6 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_1 = 0,897 \text{ рад/с}$ ,  $\xi = 0,6$ ,  $\xi_1 = 1/\sqrt{2}$ ,  $G_0 = \Delta t/2\pi$ .

В статті моделювання сейсмічного впливу на відміну від вище наведеного статистичного підходу Руїза, Пензієна передбачає врахування поперечної згинальної хвилі. Вона задається у вигляді синусоїди з максимальною амплітудою сейсмічного горизонтального переміщення ґрунту  $A(t)$ , частотою рухомої хвилі  $\tilde{\omega}$ , яка залежить від значення максимального прискорення ґрунту  $a(t)$  і запізнення хвилі  $\tau$  в системі

$$x(t) = A(t) \sin \tilde{\omega}(t - \tau), \quad (10)$$

де  $A(t)$  – амплітуда горизонтального переміщення ґрунту,  $\tilde{\omega} = 2\pi/\tilde{T}$  – частота рухомої хвилі,  $\tilde{T} = 2\pi\sqrt{a(t)/A(t)}$  – період поперечних згинальних коливань,  $\tau = \frac{z}{\tilde{v}(t)}$  – запізнення рухомої хвилі,  $\tilde{v}(t)$  – швидкість хвилі,  $z$  – вертикальна координата системи.

В статті рухома хвиля (10), яка є хвильовою реакцією системи на горизонтальне переміщення ґрунту після початку землетрусу, подається у вигляді недосконалості форми системи.

При наявності реального запису прискорення і переміщення ґрунту імовірніше моделювання сейсмічного впливу може бути виконано за допомогою вейвлет-аналізу та теорії рухомих хвиль. Акселерограма ґрунту представляється у вигляді стаціонарної та обвідної частин [20]. За допомогою вейвлет-перетворення фіксується час настання максимального прискорення ґрунту  $t_1$  і час початку його затухання  $t_2$ . В момент часу  $t = t_1$  формується рухома поперечна згинальна хвиля в системі (10). В момент часу  $t_1$  обчислюється дисперсія прискорення ґрунту  $D_k$  за його спектральною щільністю, що отримана за допомогою статистичної обробки стаціонарної частини впливу

$$D_k(t) = G_{aa}(\omega_k) \Delta\omega, \quad (11)$$

де  $G_{aa}(\omega_k)$  – спектральна щільність впливу,  $\omega_k = k\Delta\omega$  – частота сейсмічного впливу. Тоді при  $t_1 > t \geq t_2$  вплив може бути змодельовано у вигляді прямокутних імпульсів

$$\begin{cases} t = t_1 & x(t) = A(t) \sin \tilde{\omega} \left( t - \frac{z}{\tilde{v}(t)} \right), \\ t_1 > t \geq t_2 & a(t) = \sqrt{2} \sum_{k=1}^N \sqrt{D_k(t)}. \end{cases} \quad (12)$$

**2. Математична модель нестационарних стохастичних коливань пружних систем та методи їх дослідження.** В статті математичне моделювання та дослідження нестационарної стохастичної поведінки пружних систем при сейсмічному впливі заснована на методах скінченноелементного аналізу, нелінійної механіки і вейвлет-аналізу. Скінченноелементна модель пружної системи с урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив (10) будується з використанням сучасного обчислювального комплексу NASTRAN [22]. Застосовуючи покроковий метод Ньютона-Рафсона, який реалізовано в комплексі, розв'язується нелінійна задача статичної пружної системи при дії експлуатаційного навантаження. Визначаються характеристики її напружено-деформованого стану (зусилля, деформації, напруження) та стійкості (критичне значення навантаження і форма деформування). За допомогою методу Ланцоша обчислюються частоти і форми власних коливань системи без і з урахуванням експлуатаційного навантаження.

Математична модель нестационарних стохастичних коливань системи на сейсмічний вплив формується на основі принципу Даламбера-Лагранжа у вигляді диференціальних рівнянь другого порядку в узагальнених координатах. Наприклад, для системи з однією степенню вільності диференціальне рівняння руху при сейсмічному впливі має вид

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\omega_0\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = \bar{a}_{gf}(t), \quad (13)$$

де  $y(t)$  – узагальнена координата,  $\omega_0$  – власна частота коливань,  $\xi$  – коефіцієнт демпфірування,  $\bar{a}_{gf}(t)$  – прискорення ґрунту на рівні фундаменту. Важливо, при дослідженні відгуків пружних систем на сейсмічний вплив врахувати деформацію системи від експлуатаційного навантаження. Рівняння (13) в цьому випадку переписується у вигляді

$$\ddot{y}(t) + 2\xi\tilde{\omega}_0\dot{y}(t) + \tilde{\omega}_0^2 y(t) = \bar{a}_{gf}(t), \quad (14)$$

де  $\tilde{\omega}_0$  – частота власних коливань навантаженої системи.

За допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку із застосуванням програми NASTRAN [22] або Mathcad [23] знаходяться розв'язки диференціальних рівнянь руху (13), (14) у вигляді відгуків системи (узагальнених переміщень, узагальнених швидкостей та узагальнених прискорень).

За допомогою методів вейвлет-аналізу виконується аналіз сейсмічного впливу і відгуків пружних систем як одновимірних сигналів в частотно-часовому просторі. Вейвлет-перетворення такого сигналу є представлення його у вигляді узагальненого ряду із системою базисних функцій

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (15)$$

який містить материнський вейвлет  $\psi(t) \in L^2(R)$  з параметром часового масштабу  $a$  та зсуву в часі  $b$ . В якості базисних функцій можна застосовувати широкий набір вейвлетів. Наприклад, в статті декомпозиція отриманих реалізацій сейсмічного впливу і відгуків системи виконується за допомогою дискретних ортогональних Добеши4 і неперервних неортогональних Морле комплексних одновимірних вейвлет-функцій. Діадне дискретне вейвлет-перетворення (DWT) одновимірних реалізацій виконується в системі Mathcad [23] вейвлетом Добеши4 четвертого порядку функціями прямого перетворення. Значення параметрів  $a$  і  $b$  задаються у вигляді степеневих функцій

$$a = 2^m, \quad b = k \cdot 2^m, \quad \psi_{mk} = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi(2^{-m}t - k), \quad (16)$$

де  $m$  і  $k$  – параметр масштабу і зсуву відповідно (цілі числа).

Базис в дискретному представленні набуває вигляду

$$\psi_{mk} = |a|^{-m/2} \psi(a^{-m}t - k). \quad (17)$$

Вейвлет-коефіцієнти прямого перетворення мають вид

$$C_{mk} = \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \psi_{mk}(t) dt, \quad (18)$$

де  $S(t)$  – реалізація сейсмічного впливу або відгуку пружної системи.

При неперервному вейвлет-перетворенні реалізацій вейвлет-спектр в системі Developer Studio [24] подається у вигляді функції двох аргументів: часового масштабу  $a$ , який обернений до частоти та зсуву впливу за часом  $b$

$$W(a, b) = (S(t), \psi_{ab}(t)) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad (19)$$

де  $C_\psi$  – нормуючий коефіцієнт

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi(\omega)|^2 |\omega|^{-1} d\omega < \infty, \quad (20)$$

$\Psi(\omega)$  – Фур'є-перетворення вейвлета  $\psi(t)$ .

Способи візуалізації вейвлет-спектру можуть бути різними. Найбільш широко застосовується візуалізація у вигляді площини  $ab$  з локалізацією екстремумів вейвлет-коефіцієнтів або у вигляді поверхні в трьохвимірному просторі.

**3. Тестова задача.** Досліджено стохастичну поведінку будівлі висотою 10 м, яка в першому наближенні представлена у вигляді вертикального пружного стержня з жорстко закріпленим нижнім кінцем у ґрунт і вільним верхнім кінцем. Поперечний переріз стержня прийнято  $0,4\text{ м} \times 0,4\text{ м}$ , згинальна жорсткість та погона маса задані однорідними вздовж його висоти. Матеріал стержня (бетон марки В25) має такі механічні характеристики:  $E = 30 \times 10^9 \text{ Па}$ ,  $G = 12,75 \times 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu = 0,167$  та  $\gamma = 2,4 \times 10^3 \text{ кг/м}^3$ . Математична модель стержня побудована із застосуванням програмного комплексу NASTRAN [22] містить 20 стержневих скінченних елементів з шістьма степенями вільності у вузлі.

При моделюванні ґрунту та поперечної згинальної рухомої хвилі в стержні максимальні прискорення ґрунту і максимальні переміщення прийнято відповідно до магнітуди сейсмічного впливу згідно рекомендацій [6] М7:  $a = 0,1g = 0,981 \text{ м/с}^2$ ,  $A = 0,04 \text{ м}$ ; М8 :  $a = 0,2g = 1,962 \text{ м/с}^2$ ,  $A = 0,08 \text{ м}$ ; М9:  $a = 0,4g = 3,924 \text{ м/с}^2$ ,  $A = 0,16 \text{ м}$ .

Як приклад, на рис. 2, а представлено нестационарний стохастичний сейсмічний вплив магнітудою М8 у вигляді акселерограми, що отримана згідно статистичного підходу Руїза і Пензієна. За допомогою дискретного та неперервного вейвлет-перетворення отримано вейвлет-спектрограми та Фур'є-образ акселерограми впливу (рис. 2, б, в). Це дозволило визначити локалізацію в часі максимального значення прискорення та відповідну частоту сейсмічного впливу.

Хвильова реакція стержня на сейсмічний вплив задана як початкова недосконалість форми у вигляді горизонтальних відхилень вузлів моделі від вертикалі, які визначаються за формулою (10) з  $t = \tilde{T}$  [9]. Швидкість рухомої хвилі в стержні  $\tilde{v}(t) = \sqrt{B\omega_0} = \sqrt{EI\omega_0 / m} = 47,8 \text{ м/с}$ .

На першому кроці досліджень оцінено вплив хвильової реакції стержня на його напружено-деформований стан та стійкість при дії осьового навантаження. Розв'язана нелінійна задача статички (Nonlinear Static) за допомогою модифікованого покрокового методу Ньютон-Рафсона, який реалізовано в програмі NASTRAN [22]. На рис. 3 наведені форма деформування (а) і крива навантаження (б) стержня з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив магнітудою М7 при дії осьової стискаючої силою  $P = 1600 \text{ кН}$ .

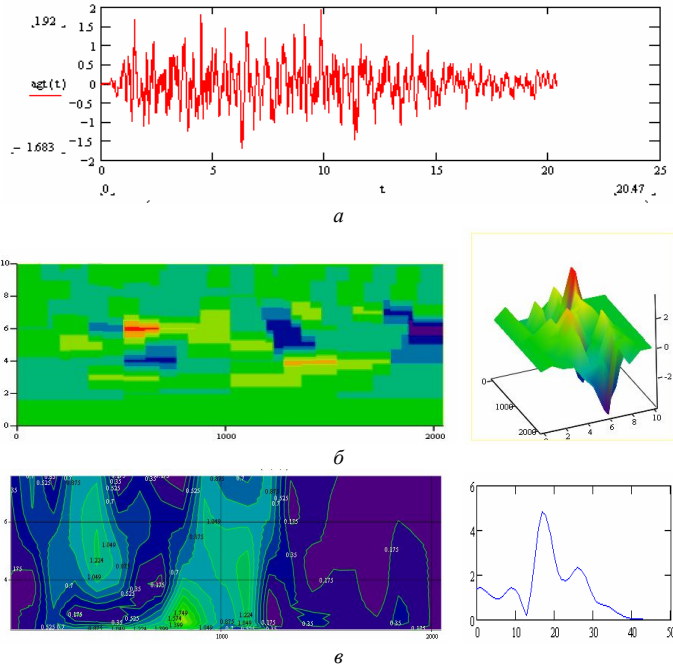


Рис. 2. Вейвлет-перетворення сейсмічного впливу (M8): акселерограма (а), вейвлет-спектрограма (Добеші4) (б), вейвлет-спектрограма та Фур'є-образ (Морле) (в)

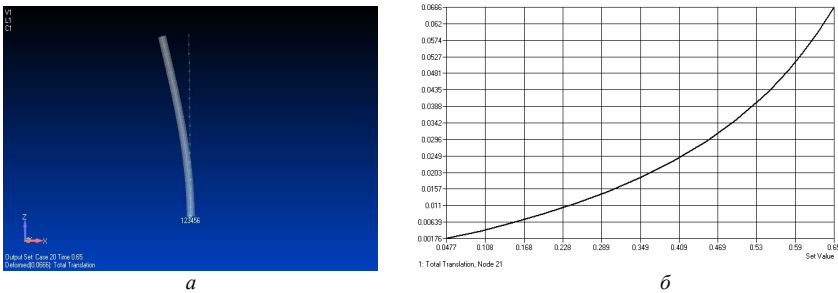


Рис. 3. Форма деформування (а) і крива навантаження (б) стержня з урахуванням хвильової реакції (M7)

Максимальним є переміщення верхнього вузла стержня. Втрата стійкості відбувається при критичному значенні осевого навантаження  $P_{кр} = 1600 \times 0,65 = 1040$  кН. Статичні характеристики стержня при втраті



стійкості з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив різної магнітуди (M7, M8, M9) наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Статичні характеристики стержня при втраті стійкості	0*	M7	M8	M9
Критичне навантаження, $\kappa H$	1578	1040	880	859
Згинальний момент, $\kappa Hm$	158	115	159	305
0* – без урахування хвильової реакції стержня на сейсмічний вплив і осьової сили				

Таким чином, зі збільшенням магнітуди сейсмічного впливу критичне значення осьової сили зменшується, а згинальний момент при втраті стійкості збільшується.

Також досліджено вплив осьової стискаючої сили  $P=10^6 H$ , яке за значенням наближено до критичного, на горизонтальні переміщення стержня. Зі збільшенням магнітуди сейсмічного впливу та вертикальної координати вузла моделі їх горизонтальні переміщення збільшуються (рис. 4).

На другому кроці за допомогою методу Ланцоша виконано модальний аналіз стержня без і з урахуванням осьового навантаження  $P=10^6 H$ . В табл. 2 наведено перші п'ять власних частот коливань стержня ( $\Gamma\zeta$ ), отриманих із урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив різної магнітуди.

Значення перших п'яти частот власних коливань ненавантаженого стержня зі збільшенням магнітуди сейсмічного впливу зменшуються відповідно на 0,03%, 0,038%, 0,033%, 0,033%, 0,009%; навантаженого осьовою силою – на 0,049%, 0,040%, 0,034%, 0,033%, 0,034%. Видно, що вплив хвильової реакції і осьової стискаючої сили на частоти власних коливань стержня незначний. Форми власних коливань однакові для стержня без і з урахуванням хвильової реакції і осьової сили  $P=10^6 H$  (рис. 5).

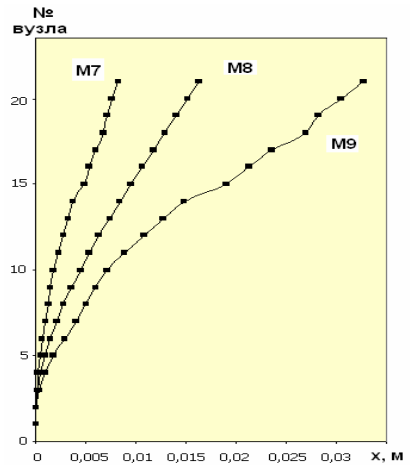


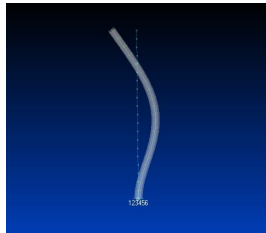
Рис. 4. Горизонтальні переміщення вузлів моделі стержня з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив різної магнітуди при дії осьової сили  $P=10^6 H$

Таблиця 2

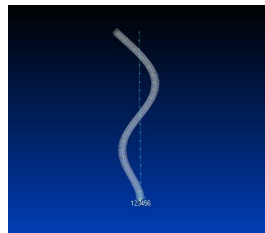
№ п/п	Частоти власних коливань ненавантаженого стержня, Гц			
	0*	M7	M8	M9
1	2,279784	2,279741	2,279614	2,279095
2	14,17506	14,17472	14,17370	14,16963
3	39,27080	39,27009	39,26772	39,25785
4	75,85801	75,85654	75,85211	75,83309
5	88,36563	88,36519	88,36386	88,35792
	Частоти власних коливань навантаженого стержня, Гц			
	0*	M7	M8	M9
1	1,416019	1,415976	1,415847	1,415322
2	13,46088	13,46055	13,45955	13,45551
3	38,88688	38,88588	38,88350	38,87354
4	75,98288	75,98139	75,97688	75,95752
5	88,36563	88,36519	88,36387	88,33580
0* – без урахування хвильової реакції стержня на сейсмічний вплив і осьової сили				



перша форма



друга форма



третя форма



четверта форма



п'ята форма

Рис. 5. Форми власних коливань стержня з урахуванням хвильової реакції

Сформовані математичні моделі нестационарних стохастичних коливань стержня з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив у вигляді диференціальних рівнянь руху пружної системи з однією степенню вільності другого порядку в узагальнених координатах (13) та (14). Коефіцієнт демпфірування приймається рівним  $\xi = 0,02$ . За допомогою прямого методу чисельного інтегрування Рунге-Кутти четвертого порядку, який реалізовано в програмі Mathcad [23], отримано розв'язки диференціальних рівнянь у вигляді узагальнених переміщень, узагальнених швидкостей та узагальнених прискорень. Як приклад, на рис. 6, 7 представлені реалізації відгуків вертикального стержня з хвильовою реакцією на сейсмічний вплив магнітудою M8 відповідно без і з урахуванням осового навантаження  $P = 10^6 \text{ H}$ .

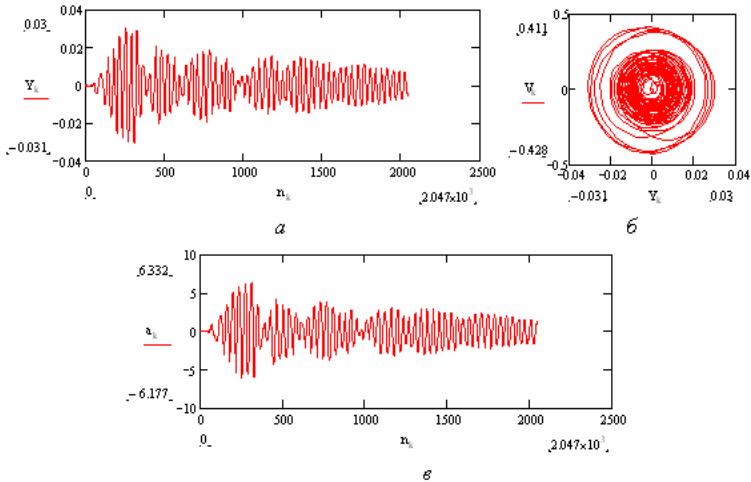


Рис. 6. Реалізації відгуків стержня без осового навантаження при сейсмічному впливі (M8): узагальнене переміщення (а), фазова траєкторія (б), узагальнене прискорення (в)

В табл. 3 наведені максимальні значення динамічних характеристик стержня без і з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив та дії осової стискаючої сили  $P = 10^6 \text{ H}$ , в табл. 4 – значення горизонтальних переміщень верхнього вузла стержня.

Таблиця 3

Динамічні характеристики	M7			M8			M9		
	0*	-P	+P	0*	-P	+P	0*	-P	+P
Прискорення, $10^{-3} \text{ м/с}^2$	98,5	98,5	98,9	197,1	197,1	198,1	394,2	394,2	396,1
Швидкість, $10^{-3} \text{ м/с}$	6,6	6,6	10,7	13,3	13,3	21,4	26,7	26,7	42,7
0* – без урахування хвильової реакції стержня на сейсмічний вплив і осової сили									

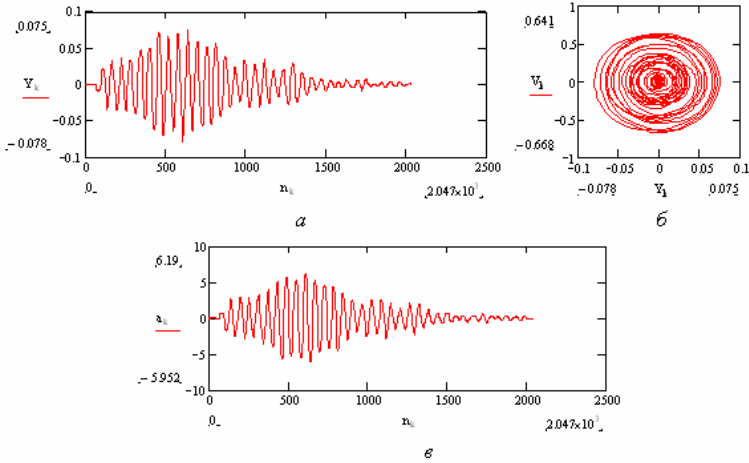


Рис. 7. Реалізації відгуків стержня з урахуванням осової сили при сейсмічному впливі (M8): узагальнене переміщення (а), фазова траєкторія (б), узагальнене прискорення (в)

Видно, що урахування поперечної згинальної хвильової реакції мало впливає на максимальні значення прискорення (0,5%) і значно більше на швидкість (30%) стержня лише при врахуванні його деформації від дії осового навантаження.

Таблиця 4

Динамічні характеристики	M7			M8			M9		
	0*	-P	+P	0*	-P	+P	0*	-P	+P
Статичні	0	8,2	8,2	0	16,4	16,4	0	32,7	32,7
Динамічні	0,5	0,5	1,2	0,9	0,9	2,5	1,9	1,9	4,9
Сумарні	0,5	8,7	9,4	0,9	17,3	18,9	1,9	34,6	37,6
0* – без урахування хвильової реакції стержня на сейсмічний вплив і осової сили									

Спостерігається значний вплив осової стискаючої сили і хвильової реакції на максимальні значення динамічної складової горизонтальних переміщень стержня (60%).

Виконано аналіз відгуків стержня з урахуванням хвильової реакції на сейсмічний вплив різної магнітуди в частотно-часовому просторі. Застосовано дискретне (Добеші4) та неперервне (Морле) вейвлет-перетворення з використанням процедур сучасних обчислювальних комплексів Mathcad [23] і Developer Studio [24]. Як приклад, в статті представлені результати вейвлет-перетворення реалізацій узагальненого переміщення (рис. 8) та узагальненого прискорення (рис. 9) стержня при сейсмічному впливі (M8) без урахування осового навантаження.

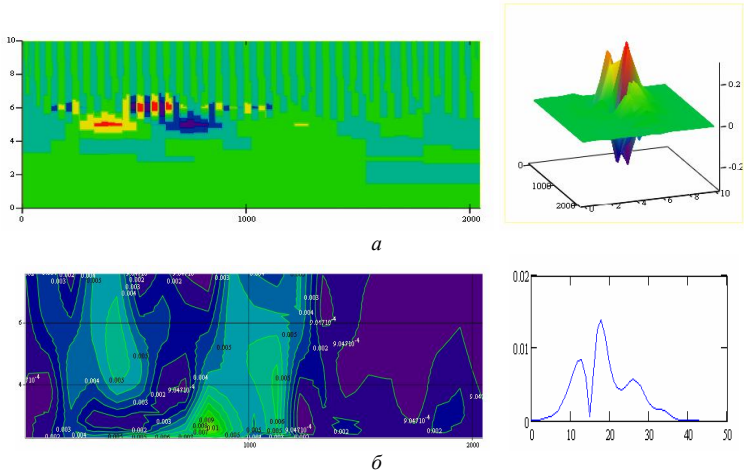


Рис. 8. Вейвлет-перетворення горизонтального переміщення ненавантаженого стержня при сейсмічному впливі (M8): дискретне (а), неперервне (б)

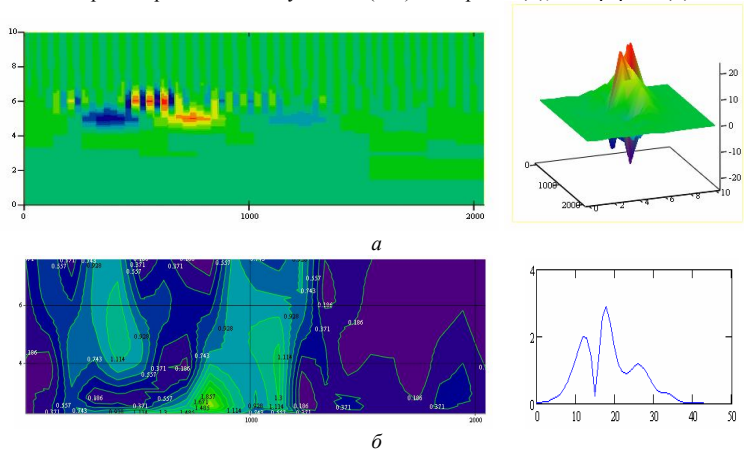


Рис. 9. Вейвлет-перетворення прискорення ненавантаженого стержня при сейсмічному впливі (M8): дискретне (а), неперервне (б)

На вейвлет-спектрограмах та Фур'є-образях спостерігаються два піки максимальних значень горизонтальних переміщень і прискорень, які локалізовані в різних часових діапазонах: на частоті власних коливань стержня і з більшою амплітудою – на частоті сейсмічного впливу.

На рис. 10, 11 представлені результати вейвлет-перетворення відгуків стержня навантаженого осью стискаючою силою  $P=10^6 H$  при сейсмічному впливі (M8).

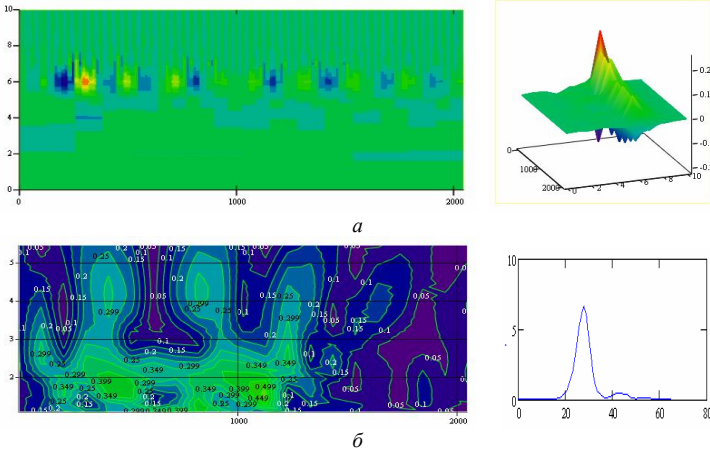


Рис. 10. Вейвлет-перетворення горизонтального переміщення навантаженого стержня при сейсмічному впливі (M8): дискретне (а), неперервне (б)

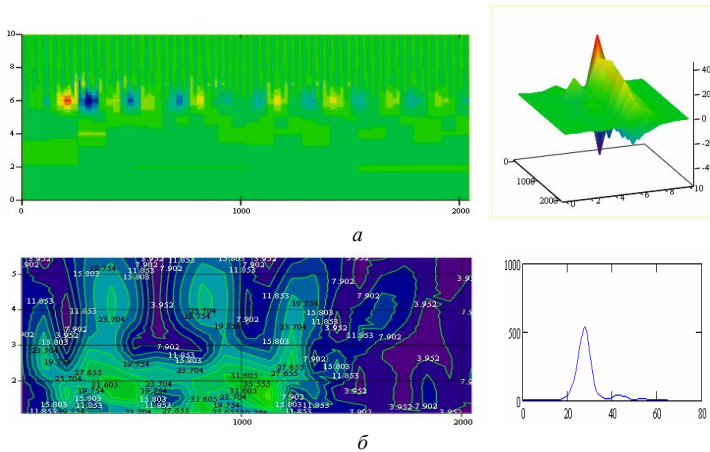


Рис. 11. Вейвлет-перетворення прискорення навантаженого стержня при сейсмічному впливі (M8): дискретне (а), неперервне (б)

На рис. 10, 11 спостерігаються квазістаціонарні стохастичні коливання стержня. На вейвлет-спектрограмах та Фур'є-образів узагальнених переміщень і узагальнених прискорень навантаженого стержня бачимо по одному піку їх максимальних значень, які локалізовані в часі настання максимального прискорення ґрунту (рис. 1, б) на частоті сейсмічного впливу.

**Висновок.** Застосування вейвлет-аналізу дає змогу якісно оцінити в частотно-часовому просторі сейсмічний вплив та відгуки пружної системи, які є нестационарними стохастичними процесами. Врахування поперечної згинальної хвильової реакції системи на горизонтальне переміщення ґрунту після початку землетрусу, яке запропоновано в методиці моделювання нестационарних стохастичних коливань пружних систем, може бути рекомендовано в розрахунках конструкцій, недосконалість форми яких значно впливає на їх втрату стійкості.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Клаф Р., Пензиен Дж.* Динамика сооружений.– М.: Стройиздат, 1979. – 320 с.
2. *Болотин В.В.* Методы теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. – М.: Стройиздат, 1982. – 351 с.
3. *Августин Г., Баратта А., Кашиати Ф.* Вероятностные методы в строительном проектировании. – М.: Стройиздат, 1988. – 584 с.
4. *Антикаев Ф. Ф.* Сильные движения грунта при землетрясениях (сейсмические воздействия) // Автореф. дис. д-ра физ.-мат. наук. Москва: ИФЗ РАН, 2001. – 47 с.
5. *Мельник-Мельников П.П., Лук'янченко О.О., Лабу М.* Застосування ефективної схеми методу статистичних випробувань для оцінювання імовірностей відказів механічної системи при сейсмічному впливі // Опір матеріалів і теорія споруд. К.: КНУБА, 2002. – Вип.70. – С.81-88.
6. *Баженов В.А., Дехтярюк С.С.* Імовірнісні методи розрахунку конструкцій. Випадкові коливання пружних систем. – К.: КНУБА, 2005. – 420 с.
7. *Wang Y. H., Siu W. K.* Structure characteristics and mechanical properties of kaolinite soils. II. Effects of structure on mechanical properties // *Can. Geotech. J.*, 2006. – 43(6), pp. 601-618.
8. ДБН В.1.2-2:2006. Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів. Навантаження і впливи. Норми проектування. – К.: Мінбуд України, 2007. – 60 с.
9. *Курзанов А.М.* Предложения по нормативному расчету сооружений на волновую сейсмическую нагрузку // *Промышленное и гражданское строительство*, 2010. – № 9. – С. 54-55.
10. *Пащинський В.А.* Імовірнісні моделі для розрахунків надійності та нормування кліматичних навантажень і впливів на будівельні конструкції // *Строительная механика и строительные конструкции: Сборник статей посвященный восьмидесятилетию А.В. Перельмутера.* – М.: Издательство СКАД СОФТ, 2013. – С. 323-332.
11. *Немчинов Ю.І., Хавкін О.К., Мар'снков М.Г.* та ін. Практичні питання динаміки будівель // *Будівництво України*, 2013. – №6. – С. 6-21.
12. ДБН В.1.1–12:2014. Будівництво у сейсмічних районах України. – К.: Мінрегіон України, 2014. – IV. – 110 с.
13. *Кендзера О.В.* Сейсмічна небезпека і сейсмічний захист в Україні // *Укр. географ. журн.*, 2015. – № 3. – С. 9-15.
14. *Christopher Torrence and Gilbert P. Compo* A Practical Guide to Wavelet Analysis // *Bulletin of the American Meteorological Society*, Vol. 79, No. 1, January 1998, pp. 61-78.
15. *Goswami J.C., Chan A.K.* Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms and Applications, A Wiley. Intersciens Publ. John Wiley&Sons, Inc, 1999, p. 359.
16. *Percival D.B., Walden A.T.* Wavelet Methods for Time Series Analysis, Cambridge University Press, 2000, p. 622.
17. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам / пер. с англ. Е. Мищенко; под ред. А. Петухова. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. – 454 с.

18. *Mukherjee S., Gupta V.K.*. Wavelet-based generation of spectrum-compatible time-histories, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 22, Issues 9-12, 2002, pp. 799-804.
19. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. Перевод с немецкого Т.Э. Кренкеля под редакцией А.Г. Кюркчана. Москва, 2004. – 280с.
20. *Мкртычев О.В., Реуцетов А.А.* Применение вейвлет-преобразований при анализе акселерограмм // *International Journal for Computational Civil and Structural Engineering*, Vol. 7, Issue 3, 2011, pp. 118-126.
21. *Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В., Кузько О.В.* Wavelet analysis features to study stochastic behavior of complex casing construction // VIII Міжнародна Антарктична Конференція. Київ. –16-18 травня 2017 р. – Тези. – С. 186 -187.
22. *Шимкович Д.Г.* Расчет конструкций в MSC/NASTRAN for Windows. – М.: ДМК Пресс, 2001. – 448 с.
23. *Кирьянов Д.В.* Самоучитель Mathcad 13.– СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.
24. *Балтер Э.* Профессиональное программирование в Microsoft Office Access 2003.: Пер. с англ. – М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. – 1296 с.

## REFERENCES

1. *Clough R., Penzien J.* *Dinamika sooruzheniy (Dynamics of structures)*. – М.: Stroyizdat, 1979. – 320 p. (rus)
2. *Bolotin V.V.* *Metody teorii veroyatnostej i teorii nadezhnosti v raschetakh sooruzheniy (Methods of the probability theory and reliability theory in analysis of constructions)*. – М.: Stroyizdat, 1982. – 351 – 600 s. (rus)
3. *Augusti G., Baratta A., Kashiati F.* *Veroyatnostnyie metodyi v stroitelnom proektirovanii (Probabilistic methods in building design)*. – М.: Stroyizdat, 1988. – 584 s. (rus)
4. *Артикаев F.F.* *Silnyie dvizheniya grunta pri zemletryaseniyah (seysmicheskie vozdeystviya) (Strong ground motion with earthquake (seismic loads))* // Avtoref. dis. d-ra fiz.-mat. nauk. Moskva: IFZ RAN, 2001.– 47 s. (rus).
5. *Melnyk-Melnykov P.P., Lukianchenko O.O., Labou M.* *Zastosuvannia efektyvnoi skhemy metodu statystychnykh vyprovuban dlia otsiniuvannia imovirnostei vidkaziv mekhanichnoi systemy pry seismichnomu vplyvi (Application of an effective scheme of the statistical trials method for estimating the mechanical system failure probability under seismic loadings)* // *Opir materialiv i teoriya sporud*. K.: KNUBA, 2002. – Vyp. 70. – S. 81-88. (ukr).
6. *Bazhenov V.A., Dekhtariuk Ie.S.* *Imovirnisni metody rozrakhunku konstrukttsii. Vypadkovi kolyvannia pruzhnykh system (Probabilistic methods of structure analysis. Random oscillations of elastic systems)*. – K.: KNUBA, 2005. - 420 p. (ukr)
7. *Wang Y.H., Siu W.K.* *Structure characteristics and mechanical properties of kaolinite soils. II. Effects of structure on mechanical properties* // *Can. Geotech. J.*, 2006. – 43(6), pp. 601-618.
8. *DBN V.1.2-2:2006. Derzhavni budivelni normy Ukrayiny. Systema zabezpechennia nadinosti ta bezpeky budivelynykh ob'ektiv. Navantazhennia i vplyvy. Normy proektuvannia. (National Structural Rules and Regulations. The system of reliability and safety provision of constructional projects. Loads and effects. Design codes.)* – K.: Minbud Ukrainy, 2007. – 60 p.
9. *Kurzanov A.M.* *Predlozheniya po normativnomu raschetu sooruzheniy na volnovuyu seysmicheskuyu nagruzku (Proposals for the normative analysis of constructions under wave seismic loading)* // *Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitelstvo*, 2010. – № 9. – S. 54-55. (rus).
10. *Pashynskiy V.A.* *Imovirnisni modeli dlia rozrakhunkiv nadiinosti ta normuvannia klimatychnykh navantazhen i vplyviv na budivelni konstrukttsii // Stroytelnaia mekhanika y stroytelnye konstruktssy: Sbornyk statei posviashchenniy vosmydesiatyletiu A.V. Perelmutera.(Probabilistic models for the reliability analysis and standardization of environmental loads and impacts on the constructions // Structural mechanics and*



- constructions: A collection of articles dedicated to the A.V. Perelmouter 80 anniversary.) – M.: Yzdatelstvo SKAD SOFT, 2013. – 323-332 p. (ukr).
11. *Nemchynov Yu.L., Khavkin O.K., Mar'yankov M.H. ta in. Praktichni pytannya dynamiky budivel' (Practical issues of buildings dynamics) // Budivnytstvo Ukrainy, 2013. – #6. – S. 6-21. (ukr)*
  12. *DBN V.1.1-12:2014. Derzhavni budivnelni normy Ukrainy. Budivnytstvo u seysmichnykh rayonakh Ukrainy (National Structural Rules and Regulations. Construction in the seismic regions of Ukraine) – K.: Minrehion Ukrainy, 2014. – IV. – 110 s. (ukr).*
  13. *Kendzera O. V. Seysmichna nebezpeka i seysmichnyy zakhyst v Ukraini // Ukr. heohraf. zhurn. (Seismic hazards and seismic protection in Ukraine. Ukr. geographical journ. , 2015. – # 3. – S. 9-15. (ukr).*
  14. *Torrence C., Compo G.P. A Practical Guide to Wavelet Analysis // Bulletin of the American Meteorological Society, Vol. 79, No. 1, January 1998, pp. 61-78.*
  15. *Goswami J.C., Chan A.K. Fundamentals of Wavelets: Theory, Algorithms and Applications. A Wiley. Intersciens Publ. John Wiley&Sons, Inc, 1999, p. 359.*
  16. *D.B. Percival, A.T. Walden. Wavelet Methods for Time Series Analysis, Cambridge University Press, 2000, p. 622.*
  17. *Daubechies I. Desyat' lektsiy po veyvletam (Ten Lectures on Wavelets). Izhevsk, NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika» publ., 2001, 454 p. (rus).*
  18. *Mukherjee S., Gupta V. K. Wavelet-based generation of spectrum-compatible time-histories, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, Vol. 22, Issues 9-12, 2002, pp. 799-804.*
  19. *Blatter C. Veyvlet-analiz. Osnovy teorii (Wavelets — Eine Einführung). Moskva, 2004. – 280 s. (rus).*
  20. *Mkrtychev O.V., Reshetov A.A. Primenenie veyvlet-analiza dlya polucheniya harakteristik akselerogramm (Application of wavelet analysis for the determination of accelerograms characteristics) // Herald MGSU. - 2013, # 7. – P. 59-67. (rus).*
  21. *Luk'yanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V., Kuz'ko O.V. Wavelet analysis features to study stochastic behavior of complex casing construction // VIII International Antarctic Conf. Kyiv. 2017. – P. 186 -187.*
  22. *Shimkovich D.G. Raschet konstruksiy v MSC/NASTRAN for Windows (Structural analysis in MSC/NASTRAN for Windows) - M.: DMK Press, 2001.- 448 p. (rus)*
  23. *Kiryakov D.V. Samouchitel Mathcad 13 (Mathcad 13 self-tutorial)– SPb.: BHV-Peterburg, 2006. – 528 s.*
  24. *Balter A. Professionalnoe programmirovaniye v Microsoft Office Access 2003. (Alison Balter's Mastering Microsoft Office Access 2003). – M.: Izdatelskiy dom «Vilyams», 2006. – 1296 s.*

*Lukyanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V., Geraschenko O.V.*

#### **APPLICATION OF WAVELET ANALYSIS TO THE MODELING OF ELASTIC SYSTEMS STOCHASTIC BEHAVIOR UNDER SEISMIC LOADING**

The technique for simulation of elastic systems stochastic behavior under seismic loading is developed on the grounds of theories and methods of wavelet analysis, nonlinear mechanics and finite element method. A probabilistic simulation of seismic effects was performed using the Ruiz & Penzien statistical method and the traveling wave theory. The transverse bending wave reaction of the system was taken into account as initial shape imperfection. The test problem of non-stationary stochastic oscillations of an elastic vertical rod under seismic actions of different magnitudes is solved. The analysis of the wave reaction and the action of the axial compressive force influence on the static and dynamic characteristics of the rod is carried out. The nonlinear static problem is solved with the help of the modified Newton-Raphson method. It has been found that geometrical imperfections of the rod reduce the values of the critical axial load and increase the bending moment. A modal analysis of the rod is performed both with and without consideration of the axial compressive force. The influence of the wave reaction on the eigenfrequencies and eigenmodes is insignificant. Mathematical models of seismic oscillations of the rod are present as

differential equations of motion in generalized coordinates. The dynamic problem is solved using a fourth-order Runge-Kutta method. It was found that transverse bending wave affects horizontal displacements and velocities of the rod only if axial load is taken into account. The influence of the wave response and axial load on the dynamic parameters of the rod in the time frequency space is estimated using discrete orthogonal Daubechies wavelet functions, continuous non-orthogonal Morlet complex wavelet functions and wavelet analysis techniques. It is worth to mention the fact that two peaks of displacements and accelerations values are observed on wavelet-spectrograms and Fourier-images for a rod without axial compressive force. They are localized at different frequencies, which correspond to the frequency of seismic action and the eigenfrequency of the rod. Meanwhile only one peak of generalized displacements and accelerations is observed at the frequency of seismic action.

**Keywords:** seismic loads, stochastic behavior, wavelet analysis, finite element method, nonlinear mechanics, traveling wave theory.

*Лук'яненко О.А., Ворона Ю.В., Костина Е.В., Геращенко О.В.*

### **ПРИМЕНЕНИЕ ВЕЙВЛЕТ-АНАЛИЗА К МОДЕЛИРОВАНИЮ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ УПРУГИХ СИСТЕМ ПРИ СЕЙСМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ**

Разработана методика моделирования стохастического поведения упругих систем при сейсмическом воздействии на основе теорий и методов вейвлет-анализа, нелинейной механики, конечных элементов. Выполнено вероятностное моделирование сейсмического воздействия с заданной магнитудой и максимальной амплитудой горизонтальной сейсмической волны с помощью статистического подхода Руиза, Пензиена и теории бегущих волн. Учтена поперечная изгибная волновая реакция системы на сейсмическое воздействие в виде начального несовершенства формы. При наличии реальной записи ускорения и перемещения грунта вероятностное моделирование сейсмического воздействия выполняется с помощью вейвлет-анализа и теории бегущих волн. Решена тестовая задача о нестационарных стохастических колебаниях упругого вертикального стержня при сейсмическом воздействии разной магнитуды с помощью прямого метода численного интегрирования Рунге-Кутты четвертого порядка. Оценено влияние волновой реакции и действия осевой сжимающей силы на статические и динамические характеристики стержня. Выполнен вейвлет-анализ реакций стержня на сейсмическое воздействие в частотно-временном пространстве.

**Ключевые слова:** сейсмическое воздействие, стохастическое поведение, вейвлет-анализ, метод конечных элементов, нелинейная механика, теория бегущих волн.

УДК 539.3

*Лук'яненко О.О., Ворона Ю.В., Костина О.В., Геращенко О.В.* **Застосування вейвлет-аналізу до моделювання стохастичної поведінки пружних систем при сейсмічному впливі** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 99. – С. 160 – 180.

*Розроблена методика моделювання стохастичної поведінки пружних систем при сейсмічному впливі на основі теорій і методів вейвлет-аналізу, нелінійної механіки, скінченних елементів і рухомих хвиль.*

Табл. 0. Іл. 2. Бібліогр. 25 назв.

*Luk'yanchenko O.O., Vorona Yu.V., Kostina O.V., Geraschenko O.V. Application of wavelet analysis to the modeling of elastic systems stochastic behavior under seismic loading // Strength of Materials and Theory of Structures. – 2017. – Issue. 99. – P. 160 – 180.*

The technique for simulation of elastic systems stochastic behavior under seismic loading is developed on the grounds of theories and methods of wavelet analysis, nonlinear mechanics and finite element method.

Tab. 0. Fig. 2. References 25 items.

*Лук'яненко О.А., Ворона Ю.В., Костина Е.В., Геращенко О.В. Применение вейвлет-анализа к моделированию стохастического поведения упругих систем при сейсмическом воздействии // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2017. – Вып. 99. – С. 160 - 180. – Укр.*

Разработана методика моделирования стохастического поведения упругих систем при сейсмическом воздействии на основе теорий и методов вейвлет-анализа, нелинейной механики, конечных элементов и бегущих волн.

Табл. 0. Ил. 2. Библиогр. 24 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ольга Олексіївна.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

**Адреса домашня:** 02152, Україна, м. Київ, вул. Івана Миколайчука 5/1, кв. 2, ЛУК'ЯНЧЕНКО Ользі Олексіївні.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-54-20.

**Мобільний тел.:** +38(067) 931-30-27.

**E-mail:** [lukianch0907@meta.ua](mailto:lukianch0907@meta.ua)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ВОРОНА Юрій Володимирович

**Адреса робоча:** 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, ВОРОНИ Юрію Володимировичу

**Робочий тел.:** +38(044) 245-48-29

**Мобільний тел.:** +38(050)750-13-61

**E-mail:** [yuvv@ukr.net](mailto:yuvv@ukr.net)

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА, КОСТИНА Олена Володимирівна.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, КОСТИНІЙ Олені Володимирівні.

**Робочий тел.:** +38(044) 241-54-20.

**Мобільний тел.:** +38(098) 275-19-93.

**E-mail:** [kl0867@meta.ua](mailto:kl0867@meta.ua)

**Автор(вчена ступень, вчене звання, посада):** кандидат технічних наук, старший науковий співробітник НДІ будівельної механіки КНУБА *ГЕРАЩЕНКО Олег Валерійович*

**Адреса робоча:** 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, *ГЕРАЩЕНКУ Олегу Валерійовичу*

**Мобільний тел.:** +38(095)661-6052

**E-mail:** [olg\\_guera@ukr.net](mailto:olg_guera@ukr.net)

УДК 539.3

## РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ КРУГЛИХ ТОВСТИХ ПЛИТ ПРИ ОСЕСИМЕТРИЧНІЙ ДЕФОРМАЦІЇ

**О.К. Гревцев<sup>1</sup>**,  
старший науковий співробітник

**Н.Ю. Селіванова<sup>2</sup>**,  
старший викладач

<sup>1</sup> *Державне підприємство  
«Державний дорожній науково-дослідний інститут імені М. П. Шульгіна»*

<sup>2</sup> *Національний транспортний університет*

Отримано точний розв'язок рівнянь теорії пружності для круглих плит з осесиметричним навантаженням.

Розглянута задача згину круглих плит, які перебувають під дією нормально доданих сил до будь-якого закону навантаження і з будь-якими типами їх опирання.

Показано, що згин круглої плити під дією осесиметричного навантаження веде до зміни температурного поля.

**Ключові слова:** теорія пружності, осесиметрична задача, функція переміщень, температурна змінна, термодинамічно обернений процес, згин круглої плити.

**Вступ.** Відомо [1], що точний розв'язок задачі теорії пружності розглянуто лише для суцільної круглої плити при дії рівномірно розподіленого тиску постійної інтенсивності. При цьому закон навантаження може бути довільного виду і тип опирання плити – будь-який.

Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах мають вигляд [1]

$$\Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{e_{,1}}{1-2\nu} - 2 \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_{\theta,1} = 0; \quad \Delta u_3 + \frac{e_{,3}}{1-2\nu} - 2 \frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)} \alpha_{\theta,3} = 0; \quad (1)$$

і в напруженнях

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,1} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0; \quad \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} + \frac{1}{r} \sigma_{13} = 0. \quad (2)$$

В рівняннях (1) і (2) індекс після коми означає частинну похідну за відповідною координатою  $r$  або  $z$ ;  $u_1$  і  $u_3$  – відповідно компоненти радіального і осьового переміщень;  $\Delta u$  – оператор Лапласа від переміщень  $u_i$  ( $i = 1, 3$ );  $\sigma_{11}$ ,  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{13}$  – відповідно компоненти радіального, окружного, осьового і дотичного напружень;  $\theta$  – температурна змінна.

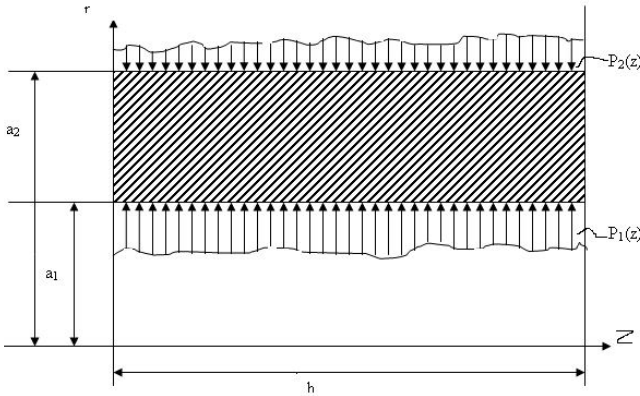


Рис. 1. Плита під дією рівномірно розподіленого навантаження

Компоненти напружень визначаються за законом Гука [2]

$$\sigma_{ij} = 2G \left( e_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} e \delta_{ij} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \theta \delta_{ij} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3)$$

з урахуванням відомих залежностей між деформаціями і переміщеннями

$$e_{11} = u_{1,1}; \quad e_{22} = \frac{1}{r} u_1; \quad e_{33} = u_{3,1}; \quad 2e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1}. \quad (4)$$

Тут  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $\alpha$  і  $\nu$  – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона;  $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$  – об'ємне розширення;

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – модуль зсуву;  $E$  – модуль пружності.

Для замикання системи рівнянь рівноваги (1) необхідно додати рівняння теплопровідності [2]

$$\Delta \theta + \frac{1}{\lambda} W = 0. \quad (5)$$

Тут  $W$  – кількість тепла, яке утворюється або поглинається одиницею об'єму тіла при його деформації;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;

$$\Delta \theta = \theta_{,11} + \frac{1}{r} \theta_{,11} + \theta_{,33}.$$

Розв'язання задачі згину круглих плит під дією довільного осесиметричного навантаження інтенсивністю  $P(r)_x$  потребує задання нормального осьового напруження  $\sigma_{33}$ . Для його визначення скористаємося запропонованим одним з авторів методом, заснованим на поступальних наближеннях розв'язання даної задачі.

Після математичних перетворень отримаємо значення  $\sigma_{33}$

$$\sigma_{33} = -P(r) \frac{12}{h^3} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} - \frac{h^3}{24} \right), \quad (6)$$

яке задовольняє умови

$$\sigma_{33} = -P(r) \text{ при } z = -\frac{h}{2} \text{ і } \sigma_{33} = 0 \text{ при } z = \frac{h^2}{2}, \quad (7)$$

де  $h$  – товщина круглї плити.

Знаючи напруження (6) і використовуючи функцію  $\phi_{(r,z)}$ , переходимо до розв'язання задачі згину товстих плит. Для отримання точного розв'язку цієї задачі треба розглянути політропний, тобто не ізотермічний і не адіабатичний, термодинамічний процес. Зв'язок функції  $\psi_{(r,z)}$  з термопружним потенціалом переміщень представлений формулою [2]

$$\phi_{(r,z)} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \psi(r,z). \quad (8)$$

В цьому випадку переміщення подаємо у такому вигляді

$$u_1(r,z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \psi_{,1}; u_3(r,z) = \frac{1+\nu}{1-\nu} \psi_{,3}. \quad (9)$$

Об'ємне розширення  $e$  знаходимо з виразу (4) з урахуванням (9)

$$e = e_{11} + e_{22} + e_{33} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[ \psi_{,11} + \frac{1}{r} \psi_{,1} + \psi_{,33} \right] = \frac{1+\nu}{1-\nu} \Delta \psi. \quad (10)$$

Підставляючи переміщення (9) і об'ємне розширення (10) в систему рівнянь (1) отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} (\Delta \psi)_{,1} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} 2\theta_{,1} &= 0, \\ \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} (\Delta \psi)_{,3} - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} 2\theta_{,3} &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Інтегруючи перше рівняння за  $r$ , а друге за  $z$ , отримаємо формулу визначення температурної змінної

$$2\theta = \Delta \psi. \quad (12)$$

Компоненти напружень знаходимо за законом Гука (3), де температурна змінна  $\theta$  визначається за допомогою рівняння (12).

Тоді маємо

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= -\frac{E}{1-\nu} \left( \frac{1}{r} \psi_{,1} + \psi_{,3} \right), \quad \sigma_{22} = -\frac{E}{1-\nu} (\psi_{,11} + \psi_{,33}), \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1-\nu} \psi_{,13}, \quad \sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu} \frac{1}{r} (r \psi_{,1})_{,1}. \end{aligned} \quad (13)$$

Для розв'язання рівнянь теорії пружності необхідно вибрати таку функцію переміщень  $\psi(r,z)$ , яка б задовольняла граничним умовам конкретної задачі.

Розглянемо у точній постановці задачі теорії пружності згин круглих плит, які знаходяться під дією нормально доданих сил  $P(r)$  до будь-якого закону навантаження симетрично відносно осі обертання  $z$  та при будь-яких типах їх опирання.

Використовуючи напруження  $\sigma_{33}$  з рівняння (6), яке задовольняє умови (7) і порівнюючи його з напруженням  $\sigma_{33}$  з рівняння (13), отримаємо диференціальне рівняння для визначення функції  $\psi(r, z)$ :

$$(r\psi_{,1})_{,1} = \frac{1-\nu}{E} \frac{12}{h^3} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} \right) rP(r). \quad (14)$$

Інтегруючи це рівняння за  $r$  в границях від  $a_1$  до  $r$ , отримаємо:

$$\psi_{,1} = \frac{1-\nu}{E} \frac{12}{h^3} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} \right) \frac{1}{r} \int_{a_1}^r rP(r) dr + \frac{1}{r} f_1(z), \quad (15)$$

де  $f_1(z)$  - довільна функція інтегрування;  $a_1$  - радіус центрального отвору плити.

Якщо плита суцільна ( $a_1 = 0$ ), то  $f_1(z)$  необхідно вважати рівною нулю для переміщень  $u(r)$ .

Знову інтегруючи (15) за  $r$  в границях від  $a_1$  до  $r$ , знайдемо:

$$\psi(r, z) = \frac{1-\nu}{E} \frac{12}{h^3} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} \right) \times \int_{a_1}^r \int_{a_1}^r rP(r) dr dr + f_1(z) \ln \frac{r}{a} + f_2(z), \quad (16)$$

де  $f_2(z)$  - довільна функція інтегрування.

Для полегшення розрахунків розглянемо суцільну циліндричну плиту ( $a_1 = 0$ ;  $f_1(z) = 0$ ). Тоді

$$\psi(r, z) = \frac{1-\nu}{E} \frac{12}{h^3} \left( \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} \right) \int_0^r \int_0^r rP(r) dr dr + f_2(z). \quad (17)$$

Диференціюючи функцію (17) за  $r$  і  $z$ , отримаємо

$$\psi_{,13} = \frac{1-\nu}{E} \frac{12}{h^3} \left( \frac{z^2}{6} - \frac{h^2}{8} \right) \frac{1}{r} \int_0^r rP(r) dr. \quad (18)$$

Підстановка  $\psi_{,13}$  у вираз для напружень  $\sigma_{13}$  з рівнянь (13), дає

$$\sigma_{13} = \frac{6}{h^3} \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) \frac{1}{r} \int_0^r rP(r) dr. \quad (19)$$

Граничні умови для дотичних напружень (19) виконуються інтегрально на краю круглої плити, тобто при  $r = a$  виконання граничних



умов у середньому вимагає, щоб напруження  $\sigma_{13}$  на краю плити зводились до опорної реакції

$$A = \left[ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{13} dz \right]_{r=a} = -\frac{1}{a} \int_0^a rP(r) dr. \quad (20)$$

Таким чином, дотичні напруження (19) точно задовольняють граничним умовам при  $z = \pm \frac{h}{2}$  і інтегрально на краю циліндричної поверхні.

Підставляючи функцію переміщень (17) в формулу (13) для нормальних радіальних напружень  $\sigma_{11}$  і знаходячи функцію  $f_2(z)$  з граничних умов  $\sigma_{11} = 0$  при  $r = a$ , отримаємо

$$\sigma_{11} = \frac{12}{h^3} \left\{ \left( \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} \right) \left[ \frac{1}{r^2} \int_0^r rP(r) dr - \frac{1}{a^2} \int_0^a rP(r) dr \right] + \right. \\ \left. + z \left[ \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r rP(r) dr dr - \int_0^a \frac{1}{r} \int_0^a rP(r) dr dr \right] \right\}. \quad (21)$$

Для окружних напружень  $\sigma_{22}$  з рівнянь (13) отримаємо:

$$\sigma_{22} = -\frac{12}{h^3} \left\{ \left( \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} \right) \times \left[ P(r) - \left( \frac{1}{r^2} \int_0^r rP(r) dr - \frac{1}{a^2} \int_0^a rP(r) dr \right) \right] + \right. \\ \left. + z \left[ \int_0^r \frac{1}{r} \int_0^r rP(r) dr dr - \int_0^a \frac{1}{r} \int_0^a rP(r) dr dr \right] \right\}. \quad (22)$$

Отримані напруження задовольняють рівнянням рівноваги (2) та граничним умовам:  $\sigma_{33} = -P(r)$  при  $z = -\frac{h}{2}$ ;  $\sigma_{33} = 0$  при  $z = \frac{h}{2}$ ;  $\sigma_{13} = 0$  при  $z = \pm \frac{h}{2}$ ; і інтегрально - на краю плити:  $\sigma_{11} = 0$  при  $r = a$ .

Представлене розв'язання задачі згину товстої плити отримано вперше. Умови опирання плити дають змогу визначити точні значення переміщень за формулою (8), використовуючи функцію (17).

Переміщення  $u_1$  і  $u_2$  приймаємо у такому вигляді

$$u_1(r, z) = \frac{1+V}{1-V} \left[ \Psi_{,1} + \frac{1}{r} (A_5 z - A_3) \right] + r \left( A_4 z + A_6 \frac{1}{2} \right), \\ u_3(r, z) = \frac{1+V}{1-V} \left[ \Psi_{,3} + A_5 \ln r \right] - A_4 \left( \frac{V}{1-V} z^2 + \frac{r^2}{2} \right) - \frac{V}{1-V} z A_6 + A_7, \quad (23)$$

де  $A_i$  - довільні сталі інтегрування.

З рівнянь переміщень (23) знаходимо напруження

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{E}{1-V} \left[ -\frac{1}{r} \Psi_{,1} - \Psi_{,33} - \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) + A_4 z + A_6 \frac{1}{2} \right], \\ \sigma_{22} &= \frac{E}{1-V} \left[ -\Psi_{,11} - \Psi_{,33} + \frac{1}{r^2} (A_5 z - A_3) + A_4 z + A_6 \frac{1}{2} \right], \\ \sigma_{13} &= \frac{E}{1-V} \Psi_{,13}, \quad \sigma_{33} = -\frac{E}{1-V} \frac{1}{r} (r \Psi_{,1})_{,1}.\end{aligned}\quad (24)$$

Вирази (23) і (24) є точним розв'язком рівнянь рівноваги (1) і (2), оскільки після підстановки перетворюють останні на тотожності. Функція  $\Psi(r, z)$  повинна задовольнити рівняння (12), за допомогою якого визначається температурна змінна  $\theta(r, z)$ , яка характеризує зміну температурного поля в плиті від дії зовнішніх навантажень і залежить від граничних умов.

Для ілюстрації пружної і термодинамічної зворотності вище наведених задач теорії пружності для осесиметричної деформації плит, спростуємо рішення, припускаючи  $P(r) = P_0 = \text{const}$  (рис. 1).

Тоді функція переміщень (17) має вигляд

$$\Psi(r, z) = \frac{1-V}{E} \frac{12}{h^3} P_0 \left( \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} \right) \frac{r^2}{4} + f_2(z).\quad (25)$$

Для дотичного напруження (19), обираємо

$$\sigma_{13} = \frac{3}{h^3} P_0 \left( z^3 - \frac{h^2}{4} \right) r.\quad (26)$$

Величина опорної реакції на краю плити дорівнює

$$A = -\frac{a}{2} P_0.\quad (27)$$

Радіальні (21) та окружні (22) напруження співпадають і мають вигляд

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{3z}{h^3} P_0 (a^2 - r^2).\quad (28)$$

Функція  $f_2(z)$  подається формулою

$$f_2(z) = \frac{1-V}{E} \frac{6}{h^3} P_0 \left( \frac{z^5}{120} - \frac{z^3 h^2}{48} + \frac{z^2 h^3}{48} + \frac{z^3 a}{12} \right) + C_1 z + C_2,\quad (29)$$

де  $C_1$  і  $C_2$  - довільні сталі інтегрування.

Знаходимо радіальні і нормальні переміщення (9)

$$u_1(r, z) = \frac{1+V}{1-V} \Psi_{,1} = \frac{1+V}{E} \frac{12}{h^3} P_0 \left( \frac{z^3}{6} - \frac{z^8 h^2}{8} + \frac{h^3}{24} \right) r, \quad (30)$$

$$u_3(r, z) = \frac{1+V}{1-V} \Psi_{,3} = \\ = \frac{1+V}{E} \frac{3}{2h^3} P_0 \times \left[ r^2 \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) - \left( \frac{z^4}{6} - \frac{h^2 z^2}{4} + \frac{zh^3}{6} + z^2 a^2 \right) \right] + \frac{1+V}{1-V} C_1. \quad (31)$$

Радіальне переміщення (30) робить опір плити таким, що допускає переміщення плити у напрямку осі обертання. Нормальне переміщення (31) дозволяє по різному закріпляти точки краю плити від їх вертикального зміщення.

Як приклад, розглянемо шарнірне закріплення точок контуру плити у серединній площині, тобто за

$$u_3 = 0; \quad r = a; \quad z = 0.$$

Задовольняючи ці граничні умови для переміщення (31), отримаємо рівняння для довільної сталої інтегрування  $C_1$

$$\frac{1+V}{1-V} C_1 = \frac{1+V}{E} \frac{3}{2h^3} P_0 \frac{a^2 h^2}{4}. \quad (32)$$

Після підстановки цієї величини у (31), отримаємо

$$u_3(r, z) = \frac{1+V}{E} \frac{3}{2h^3} P_0 \times \left[ r^2 \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) + \frac{a^2 h^2}{4} - \left( \frac{z^4}{6} - \frac{z^2 h^2}{4} + \frac{zh^3}{6} + a^2 z^2 \right) \right]. \quad (33)$$

Напруження, що відповідають переміщенням (30) і (33), мають вигляд

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \frac{3}{h^3} P_0 (a^2 - r^2) z, \quad \sigma_{13} = \frac{3}{h^3} P_0 \left( z^2 - \frac{h^2}{4} \right) r, \\ \sigma_{33} = -\frac{6}{h^3} P_0 \left( \frac{z^3}{3} - \frac{h^2 z}{4} + \frac{h^3}{12} \right). \quad (34)$$

Функція переміщень (25) з урахуванням (29) буде такою

$$\Psi(r, z) = \frac{1-V}{E} \frac{6}{h^3} P_0 \times \left[ \left( \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} \right) \frac{r^2}{4} - \right. \\ \left. - \left( \frac{z^5}{120} - \frac{z^3 h^2}{48} + \frac{z^2 h^3}{48} + \frac{a^2 z^2}{12} \right) + \frac{a^2 z^2}{16} z \right] + C_2, \quad (35)$$

де  $C_2$  - довільна стала інтегрування.

Знаходимо температурну змінну  $\theta(r, z)$  для циліндричної круглої плити, яка характеризує зміну температурного поля плити при дії зовнішнього навантаження  $P_0$ .

$$\alpha\theta = \Delta\psi = \psi_{,11} + \frac{1}{r}\psi_{,1} + \psi_{,33}. \quad (36)$$

Підставляючи функцію (35) у (36), знаходимо

$$\theta(r, z) = \frac{(1-V)}{E\alpha} \frac{6}{h^3} P_0 \left[ \frac{z^3}{6} - \frac{zh^2}{8} + \frac{h^3}{24} - (a^2 - r^2) \frac{z}{2} \right]. \quad (37)$$

Відомо, що зовнішнє навантаження (поверхнєве, об'ємне) викликає деформацію тіла і водночас спричиняє зміну температурного поля в ньому [3]. Зміна температури становить  $\theta = T - T_0$ , де  $T$  - абсолютна температура точки тіла,  $T_0$  - температура ненапруженого тіла при  $t = 0$ .

Отже, при взаємодії пружного неізолюваного тіла з навколишнім середовищем під час його деформації змінюється температура точок тіла і відбувається поглинання або виділення тепла [4]. Цю зміну температурного поля для зігнутої круглї плити від дії навантаження  $P_0$  характеризує температурна змінна у виразі (37).

Якщо зняти навантаження  $P_0 = 0$ , напруження (34) і температурна змінна (37) дорівнюють нулю і плита повертається у початковий ненапружений недеформований стан. При цьому процес деформування відбувається дуже повільно, тобто він є термодинамічно оберненим [5].

Дослідимо деформацію плити та зміну температурного поля в ній від дії зовнішнього навантаження. Підставляючи в осьове переміщення (33)  $z = -h/2$ , отримаємо стискання верхніх шарів плити в основному напрямку

$$u_3 \left( r_1 - \frac{h}{2} \right) = \frac{1+V}{E} \frac{3h}{64} P_0 > 0. \quad (38)$$

Для нижньої поверхні плити при  $z = +\frac{h}{2}$  отримаємо

$$u_3 \left( r_1 \frac{h}{2} \right) = -\frac{1+V}{E} \frac{3h}{64} P_0 < 0, \quad (39)$$

тобто маємо розтягнену зону. Це відомий фізичний факт з теорії згину конструкцій.

Оцінимо температурну змінну з формули (37) для стиснутої зони плити

$$\theta \left( r_1 - \frac{h}{2} \right) = \frac{1-V}{E\alpha} \frac{3}{h^2} P_0 \left( \frac{h^2}{3} + a^2 - r^2 \right) \geq 0,$$

або

$$T \left( r_1 - \frac{h}{2} \right) = T_0 + \frac{1-V}{E\alpha} \frac{3}{h^2} P_0 \left( \frac{h^2}{3} + a^2 - r^2 \right), \quad r \leq a. \quad (40)$$

Для розтягнутої зони плити отримаємо

$$\theta\left(r_1 \frac{h}{2}\right) = -\frac{1-V}{E\alpha} \frac{3}{h^2} P_0 (a^2 - r^2) \leq 0,$$

або

$$T\left(r_1 \frac{h}{2}\right) = T_0 - \frac{1-V}{E\alpha} \frac{3}{h^2} P_0 (a^2 - r^2), \quad r \leq a. \quad (41)$$

Як бачимо, температура стисненої зони плити буде трохи вища за температуру розтягнутої зони. Інакше кажучи, стиснута зона виділяє тепло ( $T > T_0$ ), а розтягнута - його поглинає ( $T < T_0$ ), тобто має місце обмін тепла плити з зовнішнім середовищем. Аналогічна теорія була розроблена К. Зенером [6] для тонкої пластинки при її згинальних коливаннях і отримала блискуче експериментальне підтвердження.

Підставляючи в рівняння (5) температурну змінну (37), яка відповідає зміні температурного поля, що з'являється при згині круглої плити від дії рівномірно розподіленого навантаження постійної інтенсивності, знаходимо потужність потоку тепла в різних зонах плити

$$W = -\lambda \Delta \theta = -\lambda \frac{(1-V)}{E\alpha} \frac{18z}{h^3} P_0. \quad (42)$$

В стиснутій зоні плити ( $z = -h/2$ )

$$W = \lambda \frac{(1-V)}{E\alpha} \frac{9}{h^2} P_0 > 0 \quad (43)$$

іде виділення тепла.

В розтягнутій зоні плити ( $z = h/2$ )

$$W = -\lambda \frac{(1-V)}{E\alpha} \frac{9}{h^2} P_0 < 0 \quad (44)$$

іде поглинання тепла із зовнішнього середовища.

Таким чином, за рахунок теплопровідності плити з'являється тепловий потік від її стиснутої зони до розтягнутої.

**Висновки.** При розв'язанні задачі теорії пружності для згину осесиметрично навантажених круглих плит, формули напружень і переміщень отримані вперше. Закон навантаження може бути довільного виду і тип опирання – будь-яким. Отриманий розв'язок задачі згину круглої плити свідчить про те, що дія зовнішніх сил призводить до зміни температурного поля в плиті і виникнення теплового потоку.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Голденблат И.И.* Нелинейные проблемы теории упругости. – М.: Наука, 1969. – 336 с.
2. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.
3. *Ландау Л.Д. и Лившиц Е. М.* Теория упругости. – М.: Наука. 1987. – Т. VII. – 246 с.

4. Мелан Э., Паркус Г. Термоупругие напряжения, вызываемые стационарными температурными полями. – М.: Физматгиз, 1958. – 167 с.
5. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
6. Фен Дж. Машины, энергия, энтропия. – М.: Мир, 1986. – 336 с.

#### REFERENCES

1. *Holdenblat I.* Nelineynye problemy teorii uprugosti (Nonlinear problems of the theory of elasticity). - M.: Nauka, 1969. - 336 p.
2. *Germain P.* Kurs mekhaniki sploshnyh sred (Course of mechanics of continuous media). - M.: Vychsh Shkola, 1983. - 399 p.
3. *Landau L., Livshits E.* Teoriya uprugosti (Theory of elasticity). - M.: Nauka. 1987. - T. VII. - 246 C.
4. *Melan E., Parkus G.* Termoupruhye napryazhenia, vyzvaemye statsyonarnymy temperaturnymy polem (Thermoelastic stresses caused by stationary temperature fields). - M.: Fyzmathyz, 1958. - 167 p.
5. *Timoshenko S., Huder J.* Teoria uprugosti (Theory of elasticity). - M.: Nauka, 1979. - 560 p.
6. *Feng J.* Mashiny, energya, entropya (Machines, energy, entropy). - M.: Mir, 1986. - 336 p.

*Hrevtsev O., Selivanova N.*

#### **SOLVING THE PROBLEM OF ELASTICITY FOR ROUND THICK PLATES AT AXIALLY SYMMETRIC STRAIN**

Here are considered the problems of the theory of elasticity for bodies of rotation loaded axially symmetrically. The exact solutions of the displacement of the theory elasticity for round plates loaded axially symmetrically. It is shown that the solution of the problem of bending of circular plates under the action of an arbitrary axisymmetric load of intensity  $P$  requires the specification of a normal axial stress. To determine it, we use a method based on translational approximations of the solution of this problem, proposed by one of the authors. The solutions are found in a closed form to determine the stresses at any point of the body under consideration, which is loaded by an asymmetrically uniformly distributed load-pressure. The problem of the bending of circular plates under the action of normally applied forces is considered. The law of loading of round plates, as well as the type of their resistance, can be arbitrary, which means, any. When solving the bending problem of circular plates under the action of an arbitrary axisymmetric load, a function  $f$  is used, analogous to the thermoelastic displacement potential. For an exact solution of this problem, a polytropic, namely, non-isothermal and non-adiabatic thermodynamic process is considered. The function  $f$  must satisfy the equation for the volumetric expansion, by means of which the temperature change that arises under the action of the load and which depends on the boundary conditions of the resistance is determined. It is shown that during the deformation, the temperature of the body point changes and as a result, there is an absorption or release of heat by an elastic non-insulated body when it interacts with the surrounding medium. In particular, the compressed zone of the plate generates heat, and the stretched zone absorbs it. It is shown that when stress is removed, the stresses and temperature stresses disappear and the plate returns to the unstrained and undeformed state. The deformation process is very slow, that is, it will be thermodynamically reversible. When solving the problem of the theory of elasticity for bending of circular plates loaded asymmetrically, the formulas for stresses and displacements were obtained for the first time, and the possibility of determining the stress-strain state of any point of the rotating body in question is of great practical importance.

**Keywords:** theory of elasticity, axisymmetric function movement, temperature change, thermodynamically reversible (inverse) process, bending round plate.

*Гревцев А.К., Селиванова Н.Ю.*

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ КРУГЛЫХ ТОЛСТЫХ ПЛИТ ПРИ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ДЕФОРМАЦИИ**

Получено точное решение уравнений теории упругости для круглых плит нагруженных осесимметрично. Рассмотрена задача изгиба круглых плит, находящихся под действием нормально приложенных сил к любому закону нагрузки и к любым типам их сопротивления. Показано, что изгиб круглой плиты под действием осесимметричной нагрузки ведет к появлению температурного поля.

**Ключевые слова:** теория упругости, осесимметричная задача, функция перемещений, температурная изменение, термодинамически обратный (обратный) процесс, изгиб круглой плиты.

УДК 539.3

*Гревцев О.К., Селіванова Н.Ю.* **Розв'язання задачі теорії пружності для круглих товстих плит при осесиметричній деформації** / Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2017. – Вип. 99. – С. 181 - 192.

*Отримано точний розв'язок рівнянь теорії пружності для круглих плит з осесиметричним навантаженням. Розглянута задача згину круглих плит, які перебувають під дією нормально доданих сил до будь-якого закону навантаження і з будь-якими типами їх опірання.*

Табл. 0. Іл. 1. Бібліогр. 6 назв.

*Hrevtsev O., Selivanova N.* **Solving the problem of elasticity for round thick plates at axially symmetric strain** / Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2017. - Issue 98. - P. 181 - 192. – Ukr. *An exact solution of the equations of the theory of elasticity for round plates loaded axially symmetrically is obtained. The problem of bending of circular plates under the action of normally applied forces to any law of loading and to any types of their resistance is considered.*

Tabl. 0. Fig. 1. Bibliograph. 6 ref.

*Гревцев А.К., Селиванова Н.Ю.* **Решение задачи теории упругости для круглых толстых плит при осесимметричной деформации** / Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2017. - Вып. 98. - С. 181 - 192.

*Получено точное решение уравнений теории упругости для круглых плит нагруженных осесимметрично. Рассмотрена задача изгиба круглых плит, находящихся под действием нормально приложенных сил к любому закону нагрузки и к любым типам их сопротивления.*

Табл. 0 Ил. 1. Библиогр. 6 назв.

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** *Старший науковий співробітник Державного підприємства «Державний дорожній науково-дослідний інститут ім. М.П. Шульгіна» ГРЕВЦЕВ Олексій Кімович*

**Адреса робоча:** *03113, Україна, м. Київ, пр. Перемоги, 57, ГРЕВЦЕВУ Олексію Кімовичу*

**Робочий тел.:** *+38 044 242 75 96*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** *Старший викладач Національного транспортного університету, СЕЛІВАНОВА Нінель Юріївна*

**Адреса робоча:** *01010, Україна, м. Київ, вул. Суворова, 1, Національний транспортний університет, СЕЛІВАНОВІЙ Нінель Юріївні*

**Робочий тел.:** *+38 044 280 38 19*

**Мобільний тел.:** *+38 063 315 65 87*

**E-mail:** *nel\_s@i.ua*



UDC 539.3

## NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF POROUS SOLIDS VIBRATION

**I.D. Kara,**

assistant of structural mechanics department

*Kyiv National University of Construction and Architecture  
31 Povitroflotskiy Avenue, Kyiv, Ukraine. 03680*

In this paper vibration of fluid-saturated porous solids under the equal distribution load is studied using two different approaches. One of them is analytical way. Biot's equations in terms of displacement, pore pressure, porosity and effective densities are used for one-dimensional column. Using boundary conditions analytical expressions for parameters of stress-strain state: the solid and fluid displacements and stresses are obtained. Another way is Boundary Integral Equation Method. Equilibrium equations for 3-D linear dynamic poroelasticity are presented. Also required components of fundamental solution tensors as weighting displacement fields are obtained and analyzed with the help of the analogy between poroelasticity and thermoelasticity. The solution of the porous solid vibration problem for two types of boundary conditions is presented in the figures. Graphs present the comparison of the normalized solid displacement  $u_3$  at the top and normalized pressure  $\sigma_{33}$  in elastic region and in porous solid of poroelastic region depending on frequency  $\omega$  that are computed using Boundary Integral Equation and analytical methods. Figures show that graphs of the displacements and pressure in poroelastic and elastic region have the same character but different values. The numerical solution of this problem was calculated using material properties which are corresponding to the Barea Sandstone. It shows that massive porous bodies cannot be modeling as homogeneous elastic media but it is necessary to use two phase model and equations of poroelasticity. Since the agreement between the BEM results and the analytical solution is good so such an approach can be used for development and testing of numerical techniques for analyzing of 3-D porous solids vibration.

**Key words:** porous media, boundary integral equations, fundamental solution, forced vibrations of the layer.

### Introduction

Porous materials are very spread in nature that's why they are widely used in technique and construction. Planning of underground structures, elaborating of fields by dynamic methods need knowledge of proceedings that are occurring in the time of wave propagation in porous saturated media. Laws of elastic theory can't be used for studying of wave propagations in saturated materials because of presence of filler changing the behavior of such materials. As a result three different compressional waves, the longitudinal fast wave, the second longitudinal slow wave, and the third transversal slow wave, are occurring during elastic vibration in saturated media. That's why we need another theory for calculating of porosity [1], [2], [3].

### 1. Basic Relations

Consider the two phase model of the poroelastic body. Following Biot [4] the system of differential equations for harmonic vibration is expressed as:

$$\mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + \rho^* \omega^2 u_j - \gamma^* \tau_{,j} = 0, \quad (1)$$

$$\tau_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa^*} \tau + i\omega \eta^* u_{k,k} = 0, \quad (2)$$

where  $u_j$  – the  $j$ th component of the displacement vector complex amplitude of the porous body skeleton;  $\tau$  – stresses in the fluid related to the fluid pressure  $p$  according to:  $\tau = -\beta p$ , where  $\beta$  is a porosity;  $\omega$  – frequency;  $\rho^*$  – the parameter, that characterize inertial properties of media during vibration proceed and can

be written as follows:  $\rho^* = \frac{\omega^2 (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2) + i\omega b(\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12})}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}}$ ,  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{22}$ ,  $\rho_{12}$

– mass densities, that are relating to each other as:  $\rho_{11} + \rho_{22} = (1 - \beta)\rho_s$ ,  $\rho_{12} + \rho_{22} = \beta\rho_f$ ,  $\rho_{12} = -\rho_a$ , where:  $\rho_s$  – the solid density,  $\rho_f$  – the fluid density,  $\rho_a = c\beta\rho_f$  – the density of connecting mass,  $c$  – the coefficient that depend on the pores geometry and frequency of excitation.

Terms  $\gamma^*$ ,  $\kappa^*$ ,  $\eta^*$  can be written as follows:

$$\gamma^* = -\frac{Q}{R} \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}, \quad \kappa^* = \frac{R}{b + i\omega \rho_{22}}, \quad \eta^* = -b \left( 1 + \frac{Q}{R} \right) + i\omega \left( \rho_{12} - \rho_{22} \frac{Q}{R} \right), \quad (3)$$

where  $b$  – a dissipation constant,  $Q$ ,  $R$  – elastic modulus's of media that depend on a porosity  $\beta$  and drained and undrained bulk modulus's  $K$ ,  $K_u$ .

Physical relations between stresses and strains in poroelasticity are expressed as:

$$\sigma_{ij} = \left( \lambda + \frac{Q^2}{R} \right) \delta_{ij} e + 2\mu e_{ij} + Q \delta_{ij} \varepsilon, \quad \tau = Qe + R\varepsilon, \quad (4)$$

where  $e = u_{j,j}$  and  $\varepsilon = w_{j,j}$  are the solid and fluid dilatation, respectively,  $e_{ij} = 0.5(u_{k,j} + u_{k,i})$  – the deformation in the solid,  $w_j$  – the component of the fluid displacement vector:

$$w_i = \frac{\tau_{,i} + (i\omega b + \omega^2 \rho_{12}) u_i}{i\omega b - \omega^2 \rho_{22}}. \quad (5)$$

## 2. Integral Formulation and Boundary Integral Equation

The Boundary Integral Equation Method is used for solving of this problem. According to J. Dominguez [5] equilibrium equations for 3-D linear dynamic poroelasticity are written as:

$$\begin{aligned} c_{ij} u_i + \int_{\Gamma} T_{ij}^* u_i d\Gamma + \int_{\Gamma} U_{4j}^* v_n d\Gamma &= \int_{\Gamma} U_{ij}^* t_i d\Gamma + \int_{\Gamma} T_{4j}^* \tau d\Gamma, \\ \frac{c\tau}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} + \int_{\Gamma} (T_{i4}^* u_i + U_{44}^* v_n) d\Gamma &= \int_{\Gamma} [t_i U_{i4}^* + \tau T_{44}^*] d\Gamma, \end{aligned}$$

where  $j=1, 2, 3$  subscript indicates the  $j$ th set of the fundamental solution;  $c_{ij} = \delta_{ij}$  for points inside the body  $\Omega$ ,  $c_{ij} = 0$  for points outside  $\Omega$ ,  $c_{ij} = 0,5\delta_{ij}$  for points on  $\Gamma$  where the boundary is smooth,  $\Gamma$  – the boundary of the body  $\Omega$ ;  $t_i = \tau_{ij} n_j$ ,  $U_n = U_i n_i$ ,  $n_i$  – the  $i$ th component of the unit normal  $\bar{n}$  to the boundary  $\Gamma$ . The variables denotes by superscript (\*) are those associated with the weighting displacement fields (fundamental solutions).

The fundamental solutions matrix in equations (1), (2) using analogy with thermoelasticity can be expressed as totality of four components:  
– the solid displacement in  $k$  direction derived from the unit point force applied to the solid following  $j$  direction:

$$U_{kj}^*(r, \omega) = \frac{\delta_{kj}}{4\pi\mu} \frac{e^{i\lambda_3(\omega)r}}{r} - \sum_{m=1}^3 a_m(\omega) \left[ \delta_{kj} U_0(r, \omega, m) + r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega, m) \right],$$

$$U_0(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [i\lambda_m(\omega)r - 1],$$

$$U_2(r, \omega, m) = \frac{e^{i\lambda_m(\omega)r}}{r^3} [3 - 3i\lambda_m(\omega)r - \lambda_m^2(\omega)r^2],$$

where  $r$  – the distance between point at which displacement calculated and force applied point,

$$\alpha_1(\omega) = \frac{\lambda_2^2 - k_1^2}{4\pi\rho^* \omega^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_2(\omega) = \frac{k_1^2 - \lambda_1^2}{4\pi\rho^* \omega^2 (\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}, \quad \alpha_3(\omega) = -\frac{1}{4\pi\rho^* \omega^2},$$

$$k_1^2(\omega) = -\frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_3^2(\omega) = -\frac{\rho^* \omega^2}{\mu}, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{i\omega\eta^* \gamma^*}{\lambda + 2\mu},$$

$$\lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa^*};$$

– the fluid stress derived from the unit point force applied to the solid following  $k$  direction:

$$U_{4k}(r, \omega) = \frac{i\omega\eta^*}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,k} r [U_0(r, \omega, 2) - U_0(r, \omega, 1)];$$

– the solid displacement in  $j$  direction derived from the following body forces  $X_i'^*$  and  $X_i^*$  applied to the fluid and solid, respectively

$$X_i'^* = \left[ \frac{-1}{4\pi r} \right]_{,i}, \quad X_i^* = \frac{i\omega b + \omega^2 \rho_{12}}{-i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} X_i'^*,$$

$$U_{j4}(r, \omega) = \frac{\gamma^*}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)(\lambda + 2\mu)} r_{,j} r [U_0(r, \omega, 1) - U_0(r, \omega, 2)];$$

– the fluid stress derived from the body forces  $X_i^*$  and  $X_i^*$  applied to the fluid and solid, respectively:

$$U_{44}(r, \omega) = \frac{1}{4\pi(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)} \left[ (\lambda_2^2 - k_1^2) e^{i\lambda_2(\omega)r} - (\lambda_1^2 - k_1^2) e^{i\lambda_1(\omega)r} \right].$$

Using equation for stresses on the plane with unit normal  $n_j$  :

$$t_{ij} = \sigma_{ij} n_j = n_i \left( \lambda u_{k,k} + \frac{Q}{R} \tau \right) + n_j (u_{i,j} + u_{j,i}),$$

and equation (5) for the fluid displacement one can obtain:

– the solid stresses on the plane with unit normal  $n_j$  derived from the unit point force applied to the solid following  $k$  direction:

$$T_{jk}(r, \omega) = n_j \left[ \lambda U_{lk,l} + \frac{Q}{R} U_{4k} \right] + \mu n_l [U_{jk,l} + U_{lk,j}], \quad k, j, l = 1, 2, 3;$$

– the fluid normal displacement derived from the unit point force applied to the solid following  $k$  direction:

$$T_{4k}(r, \omega) = \frac{(i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) U_{jk} n_j - \frac{\partial U_{4k}}{\partial n}}{(i\omega b + \omega^2 \rho_{22})};$$

– the solid stresses on the plane with unit normal  $n_j$  derived from the body forces  $X_i^*$  and  $X_i^*$  applied to the fluid and solid, respectively:

$$T_{j4}(r, \omega) = n_j \left[ \lambda U_{lk,l} + \frac{Q}{R} U_{44} \right] + \mu n_l [U_{j4,l} + U_{l4,j}];$$

– the fluid normal displacement derived from the body forces  $X_i^*$  and  $X_i^*$  applied to the fluid and solid, respectively:

$$T_{44}(r, \omega) = \frac{(i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) U_{j4} n_j - \frac{\partial U_{44}}{\partial n} - \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\partial r}{\partial n}}{(i\omega b + \omega^2 \rho_{22})}.$$

### 3. Solving of the test problem

Consider the problem of harmonic vibration of the porous elastic layer under the load equally distributed on its surface. In this case displacements  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $v_1$ ,  $v_2$  not occur but displacements  $u_3$  and  $v_3$  are the functions of the coordinate  $x_3$  [5]. Components of the stress state  $\sigma_{ij}$  and  $\tau$  depend only on the coordinate  $x_3$  as well. As a result the system of differential equations in partial derivatives can be rewritten as the system of two usual differential equations:

$$(\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u_3}{dx_3^2} + \rho^* \omega^2 u_3 - \gamma^* \frac{d\tau}{dx_3} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{d^2 \tau}{dx_3^2} + \frac{i\omega}{\kappa^*} \tau + i\omega \eta^* \frac{du_3}{dx_3} = 0. \quad (7)$$

The solution of the system (6)-(7) is given as:

$$u_3(x_3) = u e^{ikx_3}, \quad \tau(x_3) = \tau e^{ikx_3}. \quad (8)$$

Substituting the solution (8) in the system (6)-(7) and reducing to  $e^{ikx_3}$  it's possible to obtain:

$$\begin{bmatrix} (\omega^2/c_1^2 - k^2) & -ikm \\ -k\omega m & (i\omega/\kappa^* - k^2) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \tau \end{pmatrix} = 0, \quad (9)$$

where  $m \equiv \gamma^*/(\lambda + 2\mu)$ ,  $c_1^2 \equiv (\lambda + 2\mu)/\rho^*$ ,  $c_2^2 \equiv \mu/\rho^*$ .

The nontrivial solution can be obtained only in following case:

$$\text{Det} \begin{bmatrix} (\omega^2/c_1^2 - k^2) & -ikm \\ -k\omega m & (i\omega/\kappa^* - k^2) \end{bmatrix} = 0$$

or

$$k^4 - zk^2 + q = 0, \quad (10)$$

where  $z = \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{\omega^2}{c_1^2} + im\omega\eta$ ,  $q = \frac{i\omega}{\kappa^*} \frac{\omega^2}{c_1^2}$ .

Using roots of the biquadrate equation (10):

$$k_{1,2}^2 = 0, 5 \left\{ z \pm \sqrt{z^2 - 4q} \right\}, \quad (11)$$

the solution can be expressed as:

$$u_3(x_3) = u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} + u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} + u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} + u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3}. \quad (12)$$

Since the system of algebraic equations (6)-(7) is homogeneous then the fluid stress  $\tau$  using expressions (8) may be written as:

$$\tau(x_3) = X_1 \left[ u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} - u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} \right] + X_2 \left[ u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} - u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3} \right], \quad (13)$$

where  $X_i = \frac{1}{ik_1 m} \left( \frac{\omega^2}{c_1^2} - k_i^2 \right)$ ,  $i=1,2$ .

Equations for other parameters of stress-strain state of the porous elastic layer can be written as:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{33}(x_3) &= \frac{du_3(x_3)}{dx_3} = ik_1 \left[ u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} - u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} \right] + \\ &+ ik_2 \left[ u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} - u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3} \right]; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{33}(x_3) &= (\lambda + 2\mu) \frac{du_3(x_3)}{dx_3} + \frac{Q}{R} \tau = Z_1 \left[ u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} - u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} \right] + \\ &+ Z_2 \left[ u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} - u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3} \right], \end{aligned} \quad (15)$$

where  $Z_i = (\lambda + 2\mu) \left( ik_i + \frac{Q}{R} \frac{1}{ik_i \gamma} \left( \frac{\omega^2}{c_i^2} - k_i^2 \right) \right)$ ,  $i=1,2$ ;

$$\frac{d\tau(x_3)}{dx_3} = X_1 ik_1 \left[ u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} + u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} \right] + X_2 ik_2 \left[ u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} + u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3} \right]; \quad (16)$$

$$\begin{aligned} U_3(x_3) &= \frac{1}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left[ (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) u_3 - \frac{d\tau(x_3)}{dx_3} \right] = \\ &= Y_1 \left[ u_1^{(+)} e^{ik_1 x_3} + u_1^{(-)} e^{-ik_1 x_3} \right] + Y_2 \left[ u_2^{(+)} e^{ik_2 x_3} + u_2^{(-)} e^{-ik_2 x_3} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

where  $Y_i = \frac{1}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left( (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) - \frac{1}{m} \left( \frac{\omega^2}{c_i^2} - k_i^2 \right) \right)$ ,  $i=1,2$ .

To obtain additional relations for  $u_1^{(+)}$ ,  $u_1^{(-)}$ ,  $u_2^{(+)}$ ,  $u_2^{(-)}$  following boundary conditions are used:

- 1)  $u_3(0) = 0$ ,
- 2)  $U_3(0) = 0$ , using equation (17), can obtain:  $\frac{d\tau(0)}{dx_3} = 0$ ,
- 3)  $\sigma_{33}(l) = -P_0$ ,
- 4)  $\tau(l) = 0$ .

Taking into account equations (12), (13), (15), (17) after following transformations one can obtain the system of linear algebraic equations:

$$\begin{aligned} u_1^{(+)} + u_1^{(-)} + u_2^{(+)} + u_2^{(-)} &= 0, \\ X_1 ik_1 (u_1^{(+)} + u_1^{(-)}) + X_2 ik_2 (u_2^{(+)} + u_2^{(-)}) &= 0, \\ Z_1 (u_1^{(+)} e^{ik_1 l} - u_1^{(-)} e^{-ik_1 l}) + Z_2 (u_2^{(+)} e^{ik_2 l} - u_2^{(-)} e^{-ik_2 l}) &= -P_0, \end{aligned}$$

$$X_1(u_1^{(+)}e^{ik_1l} - u_1^{(-)}e^{-ik_1l}) + X_2(u_2^{(+)}e^{ik_2l} - u_2^{(-)}e^{-ik_2l}) = 0.$$

Using the solution of the system it's possible to calculate values of other parameters of stress-strain state.

The numerical solution of this problem was calculated using material properties which are corresponding to the Barea Sandstone [5], [6]:  $\lambda=4 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\mu=6 \cdot 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $\beta=0.19$ ,  $Q=1.399 \text{ N/m}^2$ ,  $R=0.444 \text{ N/m}^2$ ,  $\rho_{11}=2418 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\rho_{22}=340 \text{ Kg/m}^3$ ,  $\rho_{12}=-150 \text{ Kg/m}^3$ ,  $b=0.19 \cdot 10^9 \text{ Ns/m}^4$ .

Figure 1 shows comparing of normalized displacement  $u_3$  at the top in elastic region (the curve with designation 1) and in porous solid of poroelastic region (the curve with designation 2) versus frequency for a range going from 0 to  $5\omega_1$  where:  $\omega_1 = \frac{\pi}{2l} \sqrt{E_u / \rho^{**}}$ ,  $E_u = \frac{2\mu(1-\nu_u)}{(1-2\nu_u)}$ ,  $\rho^{**} = \rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12}$ .

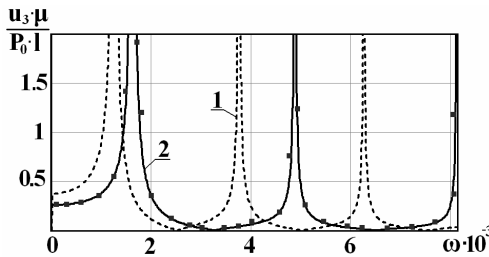


Fig. 1. Normalized displacement  $u_3$  at the top versus frequency  $\omega \cdot 10^{-3}$

Figure 2 presented comparing of normalized stresses  $\sigma_{33}$  in elastic region (the curve with designation 1) and in porous solid of poroelastic region (the curve with designation 2) versus frequency for the same range:

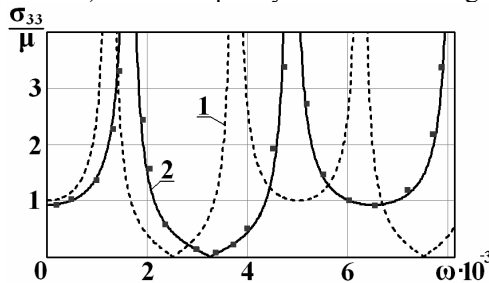


Fig. 2. Normalized stresses  $\sigma_{33}$  versus frequency  $\omega \cdot 10^{-3}$

Consider this layer under other boundary conditions:

- 1)  $u_3(0) = U_0$ ,

- 2)  $U_3(0) = -m\omega^2 U_0 (\rho_{12} + \rho_{22})$ ,
- 3)  $\sigma_{33}(l) = 0$ ,
- 4)  $\tau(l) = 0$ .

The system of linear algebraic equations is following:

$$u_1^{(+)} + u_1^{(-)} + u_2^{(+)} + u_2^{(-)} = U_0,$$

$$X_1 i k_1 (u_1^{(+)} + u_1^{(-)}) + X_2 i k_2 (u_2^{(+)} + u_2^{(-)}) = m\omega^2 U_0 (\rho_{12} + \rho_{22}),$$

$$Z_1 (u_1^{(+)} e^{i k_1 l} - u_1^{(-)} e^{-i k_1 l}) + Z_2 (u_2^{(+)} e^{i k_2 l} - u_2^{(-)} e^{-i k_2 l}) = 0,$$

$$X_1 (u_1^{(+)} e^{i k_1 l} - u_1^{(-)} e^{-i k_1 l}) + X_2 (u_2^{(+)} e^{i k_2 l} - u_2^{(-)} e^{-i k_2 l}) = 0.$$

Using the solution of the system it's possible to calculate values of other parameters of stress-strain state depending on frequency  $\omega$ . Figures 3, 4 show graphs of normalized displacement  $u_3$  at the top and normalized stresses  $\sigma_{33}$  in elastic region (the curve with designation 1) and in porous solid of poroelastic region (the curve with designation 2) versus frequency for a range going from 0 to  $5\omega_1$  under other boundary conditions:

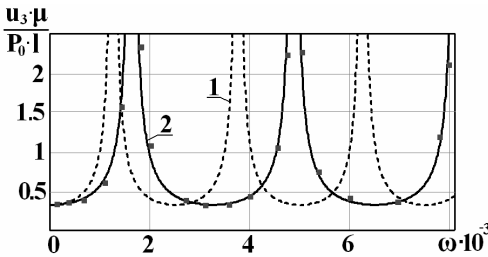


Fig. 3. Normalized displacement  $u_3$  at the top versus frequency  $\omega \cdot 10^{-3}$

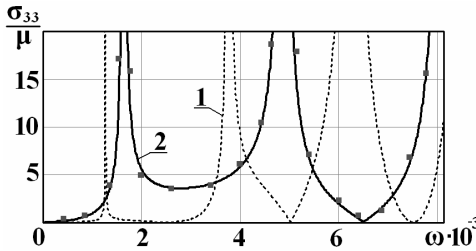


Fig. 4. Normalized stresses  $\sigma_{33}$  versus frequency  $\omega \cdot 10^{-3}$

Points on figures present the BE results.



## Conclusion

1. Figures show that graphs of the displacements and stresses in elastic region and in porous solid of poroelastic region have the same character but different values depending on frequency  $\omega$ . It means that massive porous bodies can't be modeling as homogeneous elastic media but it is necessary to use the two phase model and equations of poroelasticity.

2. Since the agreement between the BE results and the analytical solution is good so such an approach can be used for development and testing of numerical techniques for analyzing of 3-D porous solids vibration.

## REFERENCES

1. *Kovtun A.I.A.* Ob uravneniah modeli Bio i ih modifikatsiyah (On the equations of Biot's theory and their modifications) / *A.I.A.Kovtun* // *Voprosy geofiziki* (Problems of geophysics). – 2011. – V.44. – С. 3-24.
2. *Igumnov L.A.* Chislennno-analiticheskoe modelirovanie dinamiki tryehmernykh sostavnykh porouprugih tel (Number-analytical modeling dynamic three-dimensional composite poroelastic bodies). [electronic study-methodical manual] / *L.A.Igumnov, C.Y.Litvinchuk, A.V.Amenickiy, A.A.Belov.* – Nizhniy Novgorod: University of Nizhniy Novgorod, 2012. – 52 p.
3. *Li P.* Boundary element method for wave propagation in partially saturated poroelastic continua / *P.Li.* - Verlag der Technischen Universität Graz, 2012. – 143 p.
4. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-Frequency Range / *M.A.Biot* // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1956. – V. 28, №2. – P.168-178.
5. *Dominguez J.* Boundary elements in dynamics / *J.Dominguez.* – Computational Mechanics Publications. Southampton Boston, 1993. – 689p.
6. *Detornay E.* Fundamentals of poroelasticity. Chapter 5 in *Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects* / *E Detornay, A.H.-D.Cheng* // *Analysis and Design Method*, ed. C. Fairhurst, Pergamon Press. – 1993. – V.II. – P. 113-171.
7. *Tryehmnyye zadachi matematicheskoy teorii uprugosti I termouprugosti* (Three-dimensional problems of mathematical theory of elasticity and thermoelasticity) [monograph] / [*V.D.Kupradze, T.G.Hehelia, M.O.Basheleyshvili, G.V.Burchuladze*] / Edited by *V.D.Kupradze.*; M: Mir, 1976. – 664p.
8. *Nowacki W.* *Dinamicheskiye zadachi termouprugosti* (Dynamic problems of thermoelasticity) / Edited by *G.S. Shapiro* – M: Mir, 1970. – 256 p.

*Капа І.Д.*

## **ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ ПРО КОЛИВАННЯ ПОРОПРУЖНОГО МАСИВУ**

Метод граничних інтегральних рівнянь застосовується для розв'язання задачі про тривимірні гармонічні коливання поропружного масивного тіла. Наведені основні розрахункові співвідношення та проаналізовано склад матриці фундаментальних розв'язків. Аналітично та чисельно розв'язана тестова задача про змушені коливання поропружного шару.

**Ключові слова:** пропружне середовище, граничні інтегральні рівняння, фундаментальний розв'язок, змушені коливання шару.

*Кара И.Д.*

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О КОЛЕБАНИЯХ ПОРОУПРУГОГО МАССИВА**

Метод граничных интегральных уравнений применяется для решения задачи про трехмерные гармонические колебания пороупругого массивного тела. Приведены основные расчетные соотношения и проанализировано состав матрицы фундаментальных решений. Аналитически та численно решена тестовая задача про вынужденные колебания пороупругого слоя.

**Ключевые слова:** пороупругая среда, граничные интегральные уравнения, фундаментальное решение, вынужденные колебания слоя.

УДК 539.3

*Кара И.Д.* **Чисельне розв'язання задачі про коливання пороупругого масиву** //

Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2017. – Вып. 99. – С. 193 – 202.

*Метод граничних інтегральних рівнянь застосовується для розв'язання задачі про тривимірні гармонічні коливання пороупругого масивного тіла.*

*Kara I.D.* **Numerical solution of the problem of porous solids vibration** // *Opir materialiv i teoriia sporud (Strength of Materials and Theory of Structures).* – К.: KNUBA, 2017. – Issue. 99. – P. 193 – 202.

*Boundary Integral Equation Method is applied for numerical solution of the porous solids 3-D harmonic vibration problem.*

УДК 539.3

*Кара И.Д.* **Численное решение задачи о колебаниях пороупругого массива** //

Опір матеріалів і теорія споруд. – К.: КНУБА, 2017. – Вып. 99. – С. 193 – 202.

*Метод граничных интегральных уравнений применяется для решения задачи о трехмерных гармонических колебаниях пороупругого массивного тела.*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** асистент кафедри будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури *КАРА Ірина Дмитрівна*.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітрофлотський, 31, к. 306, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.

**Робочий тел.:** +380 (44) 241-54-12;

**Мобільний тел.:** +380 (93) 398-63-24;

**E-mail:** ikruska007@ukr.net

## ЗМІСТ

<i>Баженов В.А., Ворона Ю.В., Лізунов П.П., Пискунов С.О., Шишов О.В.</i> Наукова школа будівельної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури . . . . .	3
<i>Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Shkryl O.O.</i> A methodology of determining of parameter $J^*$ in discrete models of finite element method . . . . .	33
<i>Гайдайчук В.В., Мозговий В.В., Засць Ю.О., Шевчук Л.В.</i> Модельовання напружено-деформованого стану конструкції дорожнього одягу під дією транспортних навантажень . . . . .	45
<i>Баженов В.А., Солодей І.І., Вабіщевич М.О., Чепурна О.О.</i> Формулювання та розрахункові співвідношення задачі механіки руйнування для просторових тіл під дією динамічних навантажень в рамках напіваналітичного методу скінчених елементів . . . . .	58
<i>Бараненко В.О., Волчок Д.Л.</i> Визначення максимального значення навантаження стиснутої ортотропної оболонки в умовах випадкової, нечіткої і неточної інформації . . . . .	71
<i>Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.</i> Lyapunov exponents estimation for strongly nonlinear nonsmooth discontinuous vibroimpact system . . . . .	90
<i>Гужевський І.В., Солодей І.І.</i> Питання побудови сучасних математичних моделей біомеханіки при вирішенні проблем ендопротезування кульшового суглоба . . . . .	106
<i>Чибіряков В.К., Кривенко О.П., Легостаєв А.Д., Гречух Н.А.</i> Деформування пружних неоднорідних оболонок під дією нестационарних динамічних навантажень . . . . .	123
<i>Nguyen Anh Tuan, Tran Duc Chinh, Nguyen Thanh Dat</i> Analysis of the effect of the Ho Chi Minh City Tunnel settlement on the adjacent buildings . . . . .	142

*Максим'юк Ю.В.*

Індиферентність тензорів деформацій, напружень та їх прирощень  
за умови енергетичної сполученості . . . . . 151

*Лук'янченко О.О., Ворона Ю.В., Костіна О.В., Геращенко О.В.*

Застосування вейвлет-аналізу до моделювання стохастичної  
поведінки пружних систем при сейсмічному впливі . . . . . 160

*Гревец О.К., Селіванова Н.Ю.*

Розв'язання задачі теорії пружності для круглих товстих плит при  
осесиметричній деформації . . . . . 181

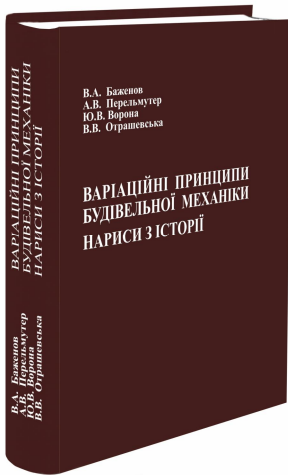
*Kara I.D.*

Numerical solution of the problem of porous solids vibration . . . . . 193

*В.А. Баженов, А.В. Перельмутер, Ю.В. Ворона, В.В. Отрашевська.*

**Варіаційні принципи будівельної механіки. Нариси з історії.**

К.: Каравела, 2018. – 924 с.



Книга присвячена історії виникнення і розвитку варіаційних принципів будівельної механіки, а також механіки в цілому і за задумом представляється у вигляді нарисів розвитку окремих напрямів, кожному з яких притамана певна історія виникнення і становлення відповідних понять, ідей, принципів, проблем і методів їх реалізації. Адже за відомою думкою Джона Бернала «У науці більше, ніж в будь-якій іншій інституції людства, необхідно вивчати минуле для розуміння сучасного і панування над природою в майбутньому».

Викладення змісту супроводжується фактами з життя і діяльності великих дослідників.

Книга може бути використана як підручник для студентів вищих навчальних закладів при реалізації магістерських програм, вивченні спеціальних курсів, які пов'язані з викладанням варіаційних принципів і методів будівельної механіки, побудовою сучасних чисельних процедур і технологій. Загалом вона зорієнтована на читачів і студентів, які вже вивчали обов'язкові курси будівельної механіки і суміжних технічних дисциплін, а також викладачів і науково-технічних працівників.

Наукове видання

**ОПР МАТЕРІАЛІВ І ТЕОРІЯ СПОРУД**  
**STRENGTH OF MATERIALS AND THEORY OF STRUCTURES**

Науково-технічний збірник  
Scientific-and-technica collected articles

Випуск 99

Головний редактор В.А.Баженів

Підп. до друку 05.12.17. Формат 60x90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Папір друк №1.

Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 11.

Тираж 100.

---

**КНУБА**

м. Київ, Повітрофлотський пр., 31. 03680.

---